Hans Walser, [20150124]

Kiepert-Hyperbel

1 Die Kiepert-Hyperbel

Der Kegelschnitt durch die drei Eckpunkte eines Dreieckes sowie dessen Schwerpunkt und Höhenschnittpunt ist immer eine gleichseitige Hyperbel (Abb. 1), die so genannte *Kiepert-Hyperbel* (Eddy&Fritsch 1994), (Walser 2012).

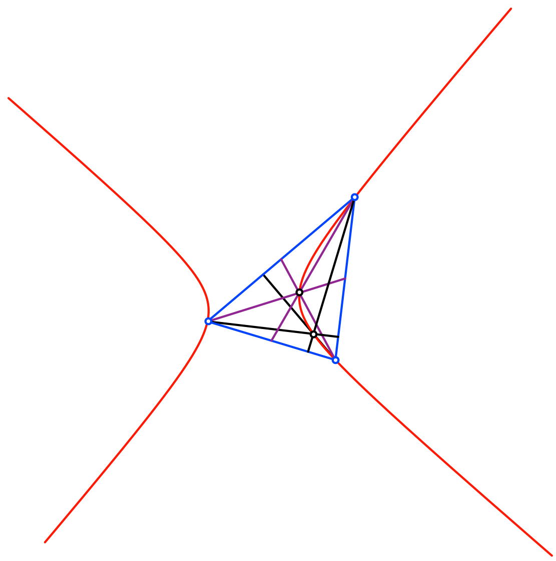

Abb. 1: Kiepert-Hyperbel

Die Kiepert-Hyperbel hat viele schöne Eigenschaften.

In den folgenden Abbildungen sind der Schwerpunkt und der Höhenschnittpunkt nicht mehr eingezeichnet, um die Figur leichter lesbar zu machen.

2 Regelmäßige Vielecke

Wir setzen den drei Seiten des Dreiecks regelmäßige Vielecke gleicher Eckenzahl an. Die Eckenzahl ist beliebig, in den folgenden Beispielen wurde mit Fünfecken gearbeitet (Abb. 2).

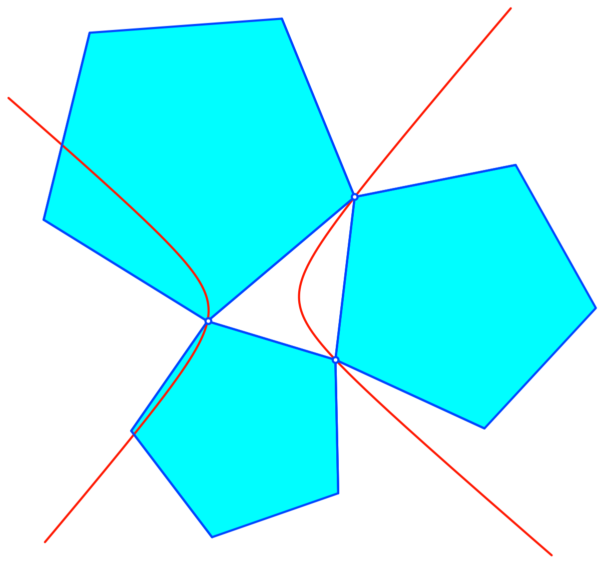

Abb. 2: Regelmäßige Vielecke

3 Einfügen von Dreiecken

Zwischen den Vielecken fügen wir gelbe Dreiecke ein gemäß Abbildung 3.

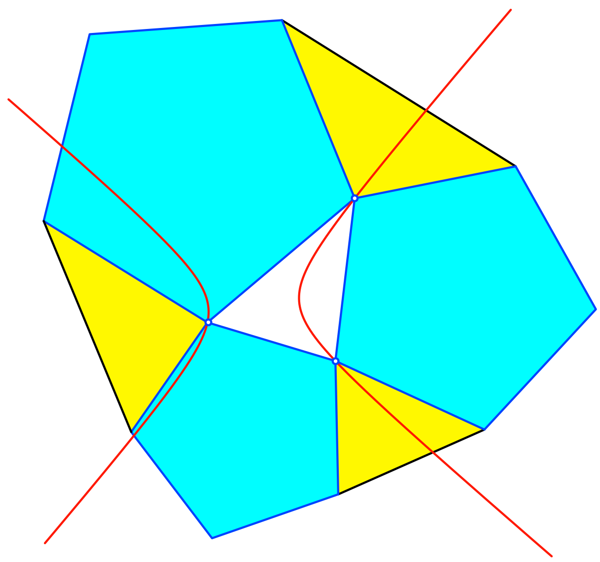

Abb. 3: Dreiecke einfügen

3.1 Schwerlinien

Nun zeichnen wir in die gelben Dreiecke jeweils die Schwerlinie, die auch durch die ecke des Ausgangsdreieckes geht (Abb. 4).

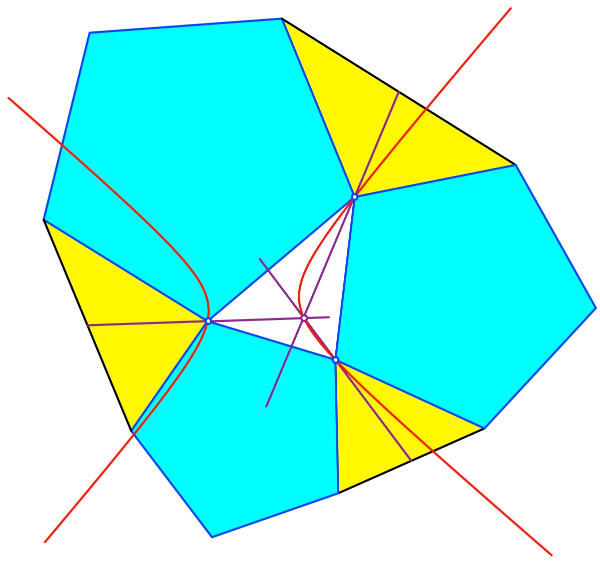

Abb. 4: Schwerlinien

Die Trägergeraden dieser drei Schwerlinien schneiden sich in einem Punkt, und dieser liegt auf der Kiepert-Hyperbel. Es handelt sich aber *nicht* um den Schwerpunkt des Ausgangsdreieckes.

3.2 Höhen

Dasselbe Spielchen funktioniert auch mit Höhen (Abb. 5).

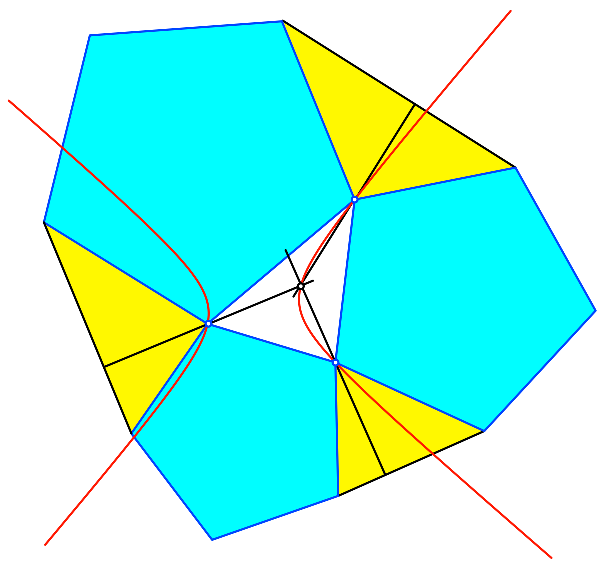

Abb. 5: Höhen

4 Größere gelbe Dreiecke

Die Dreiecke können auch durch Diagonalen der regelmäßigen Vielecke gebildet werden (Abb. 6). Es wurden regelmäßige Neunecke angesetzt. Die gelben Dreiecke haben

Diagonalen als Seiten, welche zwei Neuneckecken überspringen. In den gelben Dreiecken wurden die Schwerlinien verwendet.

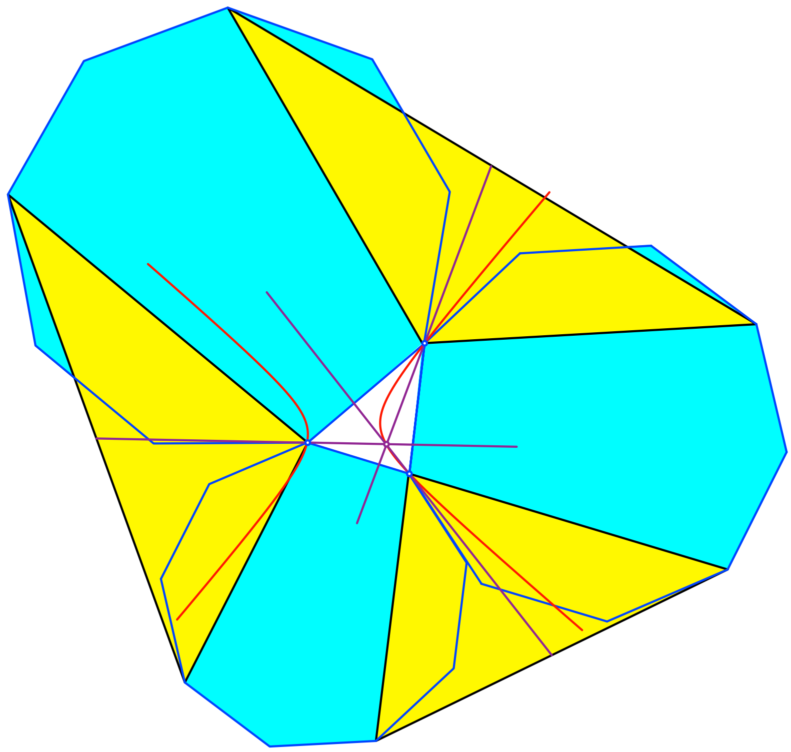

Abb. 6: Größere gelbe Dreiecke

5 Allgemeiner Sachverhalt

Die Beispiele sind Sonderfälle eines allgemeinen Sachverhaltes. Wir setzen dem Dreieck ähnliche gleichschenklige Trapeze an gemäß Abbildung 7. Dazwischen fügen wir gelbe Dreiecke ein.

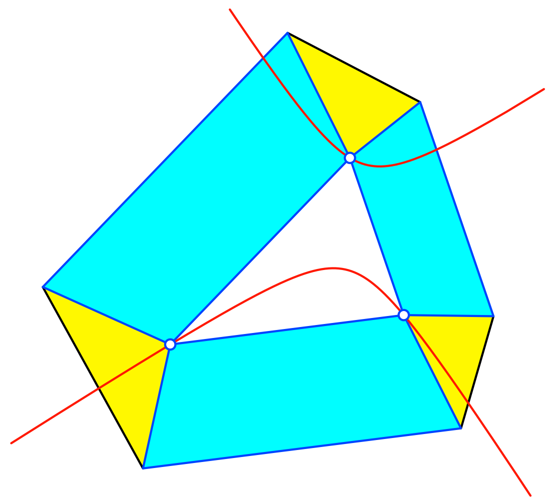

Abb. 7: Ähnliche gleichschenklige Trapeze

Nun erhalten wir sowohl mit den Schwerlinien wie auch mit den Höhen der gelben Dreiecke einen Schnittpunkt auf der Kiepert-Hyperbel (Abb. 8 und 9).

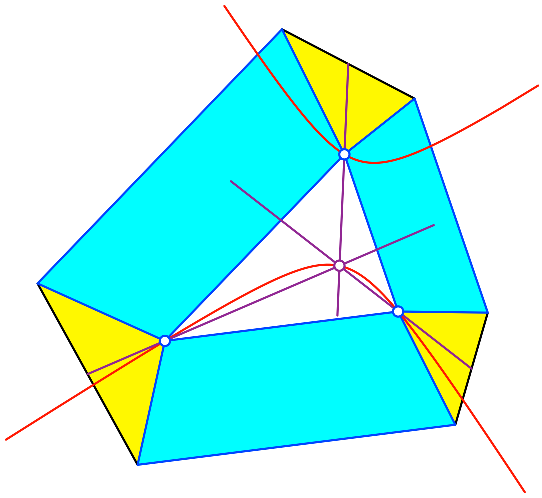

Abb. 8: Schwerlinien

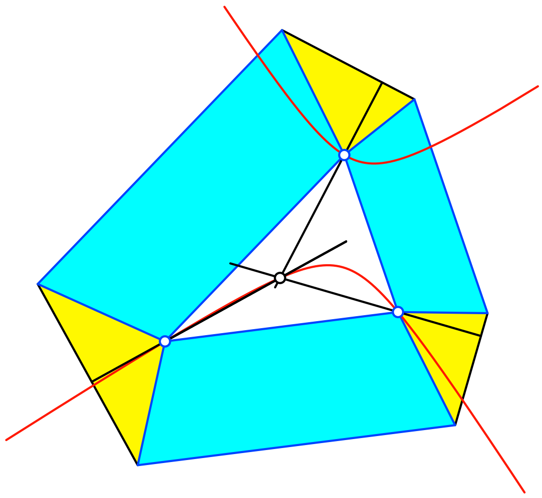

Abb. 9: Höhen

Beweis fehlt, mit DGS überprüft.

6 Sonderfall im allgemeinen Fall

Nun ist es aber so, dass eine konsistente Veränderung der Trapezhöhen die gelben Außendreiecke zwar ähnlich verändert, aber an der Lage sowohl der relevanten Schwerlinien wie auch der relevanten Höhen nichts ändert. Wichtig sind lediglich die Trapezwinkel. Wir können uns daher auf Grenzfälle von gleichschenkligen Trapezen beschränken, nämlich auf gleichschenklige Dreiecke. Die Abbildung 10 zeigt die Situation für Schwerlinien in den gelben Dreiecken.

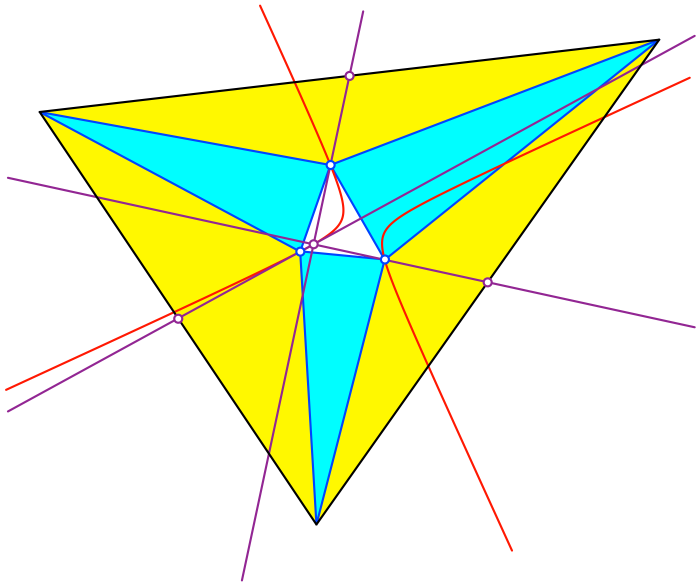

Abb. 10: Schwerlinien

Die Abbildung 11 zeigt die Situation für Höhen in den gelben Dreiecken.

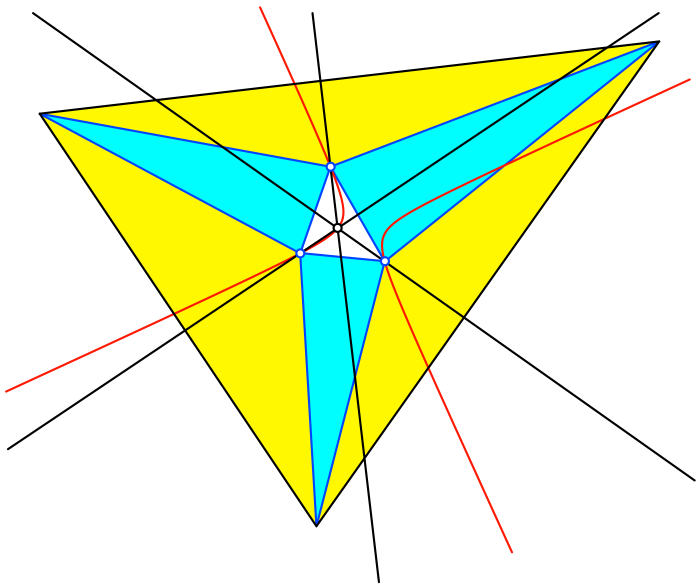

Abb. 11: Höhen

Einfach zur Erinnerung: Mit den angesetzten gleichschenkligen Dreiecken kann auch ohne die gelben Dreiecke ein Punkt der Kiepert-Hyperbel bestimmt werden (Abb. 12). Dies ist die klassische Art, die Kiepert-Hyperbel zu generieren.

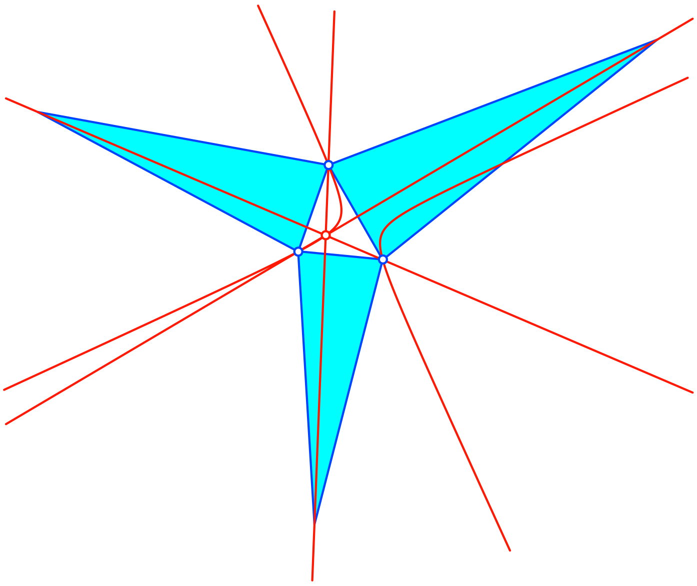

Abb. 12: Klassisch

Die Abbildung 13 zeigt die Überlagerung der oben diskutierten Möglichkeiten.

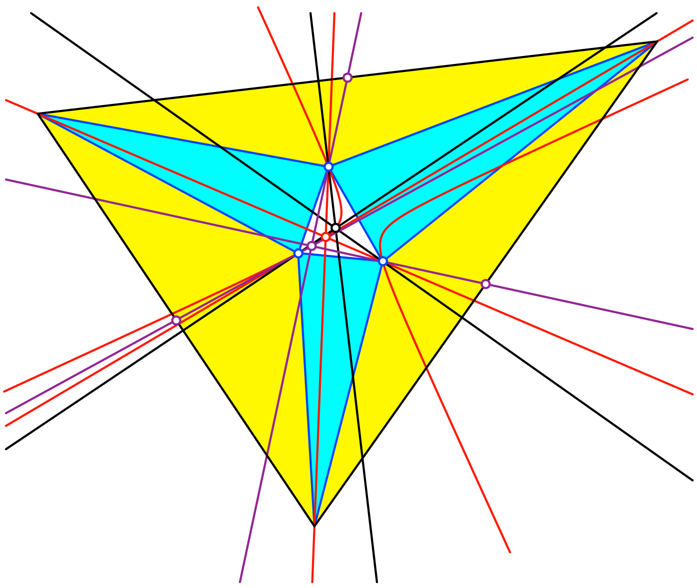

Abb.13: Überlagerung

Literatur

Eddy, R.H. / Fritsch, R. (1994): The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle. Mathematics Magazine. Vol. 67, No. 3, June, p. 188 - 205.

Walser, Hans (2012): 99 Schnittpunkte. Beispiele – Bilder – Beweise. 2. Auflage. EAGLE, Edition am Gutenbergplatz: Leipzig. ISBN 978-3-937219-95-0.