Hans Walser, [20200822]

Klammern

1 Worum geht es?

Endliche und unendliche Folgen mit Folgen als Folgenglieder.

2 Konstruktion

Wir beginnen mit einer Folge S_0, welche keine Folgenglieder enthält (leere Folge):

$$S_0 = [\ ] \tag{1}$$

Beide Klammern sind auf dem Grundlevel null. Wir haben die zugehörige Level-Folge:

$$0,\ 0 \tag{2}$$

Die Abbildung 1.0 illustriert den Sachverhalt. Die öffnende Klammer ist durch ein rotes Quadrat, die schließende durch ein blaues dargestellt.

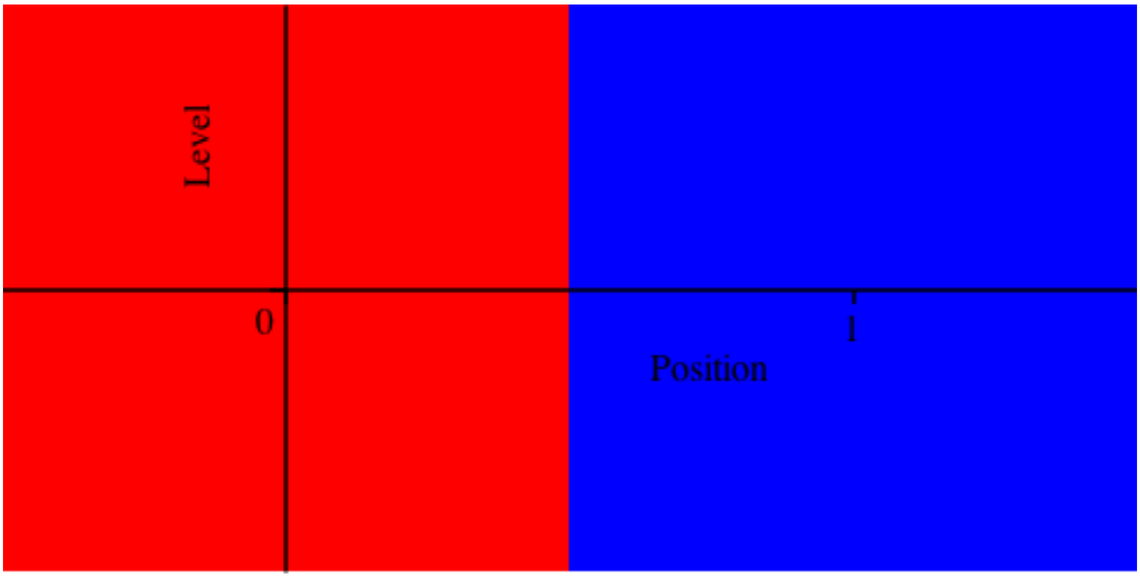

Abb. 1.0: Leere Folge

Weiter sei S_1 die Folge mit S_0 als einzigem Folgenglied:

$$S_1 = [S_0] = [[\ ]] \tag{3}$$

Die inneren Klammern sind auf dem Level 1. Wir haben also die Level-Folge:

$$0, 1, 1, 0 \tag{4}$$

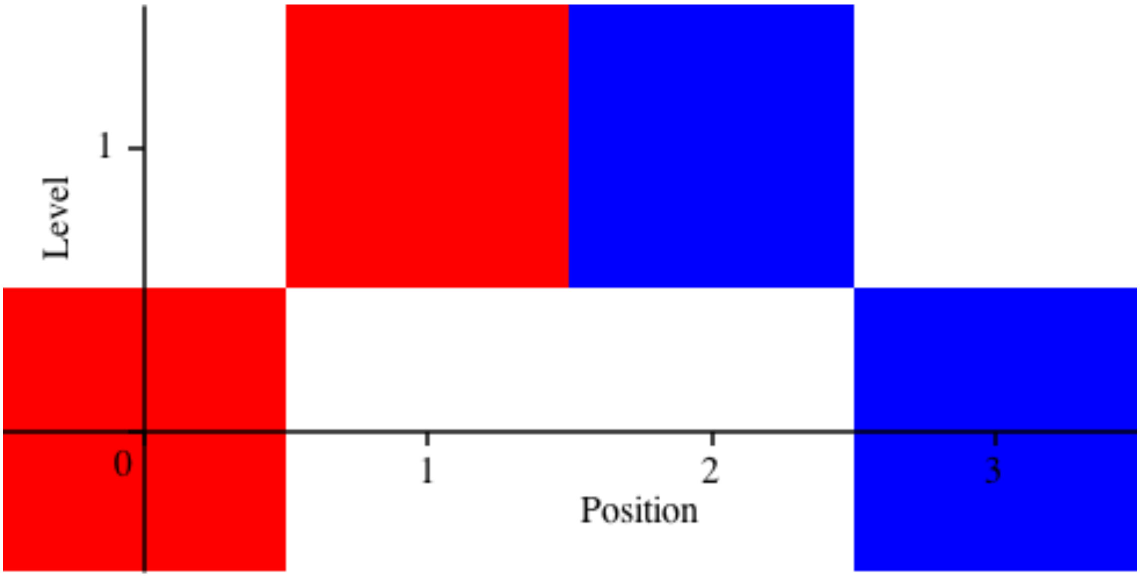

Abb. 1.1: Zwei Levels

Weiter sei S_2 die Folge mit den Folgengliedern S_0 und S_1:

$$S_2 = [S_0, S_1] = [[\ ], [[\ ]]] \tag{5}$$

Die zugehörige Level-Folge der Klammern ist:

$$0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 0 \tag{6}$$

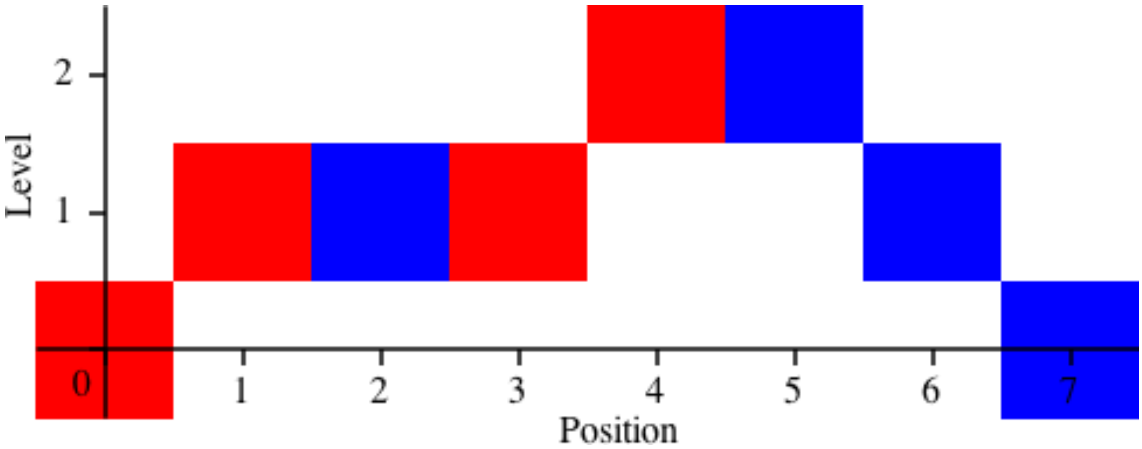

Abb. 1.2: Drei Levels

Weiter sei S_3 die Folge mit den Folgengliedern S_0, S_1 und S_2:

$$S_3 = [S_0, S_1, S_2] = [[\ ], [[\ ]], [[\ ], [[\ ]]]] \tag{7}$$

Die zugehörige Level-Folge der Klammern ist:

$$0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 0 \tag{8}$$

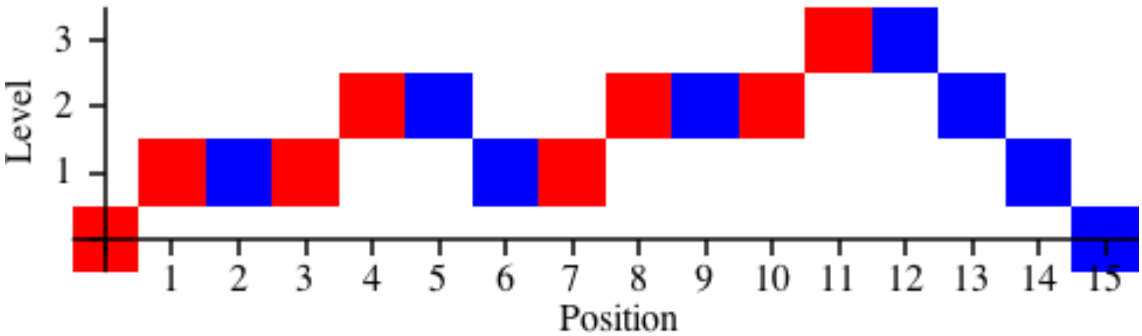

Abb. 1.3: Vier Levels

Übungshalber noch der nächste Schritt: Es sei S_4 die Folge mit den Folgengliedern S_0, S_1, S_2 und S_3:

$$S_4 = [S_0, S_1, S_2, S_3] = [[\ ], [[\ ]], [[\ ], [[\ ]]], [[\ ], [[\ ]], [[\ ], [[\ ]]]]] \tag{9}$$

Zugehörige Level-Folge der Klammern:

$$0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 0 \quad (10)$$

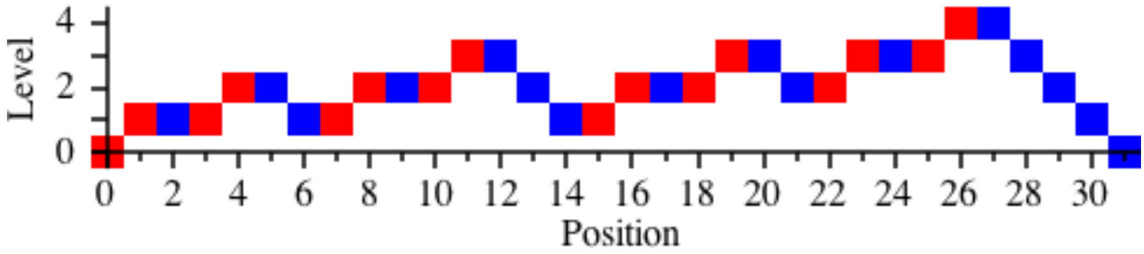

Abb. 1.4: Fünf Levels

Die Tabelle 1 gibt für die Figur der Abbildung 1.4 die Anzahlen der roten und der blauen Quadrate auf jedem Level an. Wir erkennend die Binomialkoeffizienten.

Level	Rote Quadrate	Blaue Quadrate
0	1	1
1	4	4
2	6	6
3	4	4
4	1	1

Tab. 1: Anzahlen der Quadrate pro Level

3 Rekursion

$$\begin{aligned} S_0 &= [\;] \\ S_{n+1} &= [S_0, S_1, \ldots, S_n] \end{aligned} \quad (11)$$

Für jedes S_n gibt es eine endliche Level-Folge $b_{n,k}$ mit 2^{n+1} Folgegliedern. Der Index k läuft von 0 bis $2^{n+1} - 1$. Die kleinsten Folgeglieder ($b_{n,0}$ am Anfang und $b_{n,2^{n+1}-1}$ am Schluss) haben den Wert 0. Es gibt zwei Folgeglieder ($b_{n,2^{n+1}-n-2}$ und $b_{n,2^{n+1}-n-1}$) mit dem Höchstwert n.

So entsteht ein Zahlendreieck. In der Abbildung 2 ist es symmetrisch angeordnet, aber die Zahlwerte sind nicht symmetrisch.

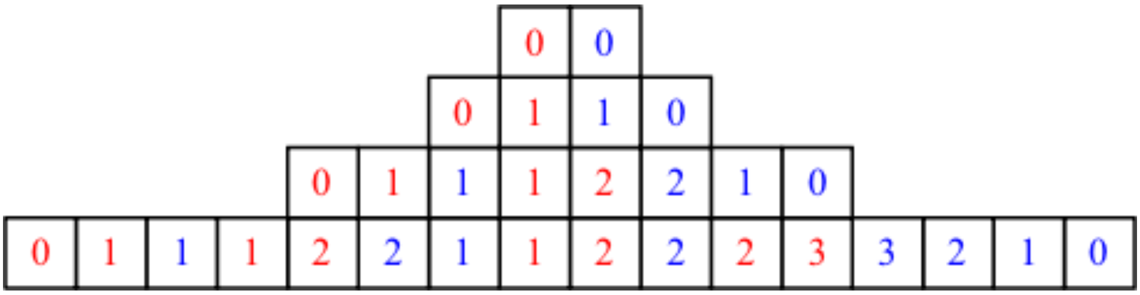

Abb. 2: Zahlendreieck

Das Zahlendreieck (die Matrix) $b_{n,k}$ kann generiert werden wie folgt.
Zunächst setzen wir die Startwerte:

```
b[0,0] := 0 :
b[0,1] := 0 :
```
(12)

Zur Farbgebung (im rgb-System) generieren wir eine zweite Matrix $c_{n,k}$ mit den Startwerten:

```
c[0,0] := 0 :
c[0,1] := 1 :
```
(13)

Die rekursive Berechnung (für n von 1 bis N) geht nun wie folgt:

```
for n from 1 to N do
 for k from 0 to 2^n-2 do
  b[n,k] := b[n-1,k]:
  c[n,k] := c[n-1,k]:
 end:
 for k from 2^n-1 to 2*2^n-2 do
  b[n,k] := b[n-1,k-2^n+1]+1:
  c[n,k] := c[n-1,k-2^n+1]:
 end:
 b[n, 2*2^n-1] := 0:
 c[n, 2*2^n-1] := 1:
end:
```
(14)

Zum Element $b_{n,k}$ gehört der Farbcode: rgb = $[1 - c_{n,k}, 0, c_{n,k}]$.

4 Folge der Level-Folgen

Wir fassen die endlichen Level-Folgen (2), (4), (6), (8), (10), ... zu einer einzigen unendlichen Folge zusammen. Das sieht schrittweise aus wie folgt:

Für den Start $n = 0$ rhalten wir natürlich dasselbe wie (2):

$$0, 0 \tag{15}$$

Die zugehörige Abbildung 3.0 entspricht der Abbildung 1.0.

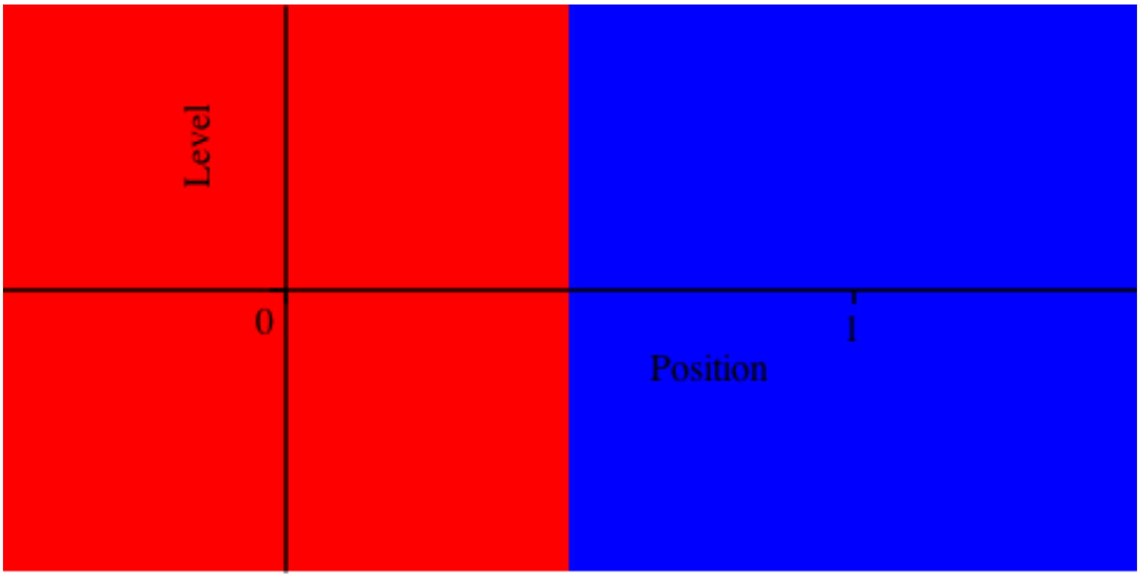

Abb. 3.0: Start

Für $n = 1$ ergibt sich:

$$0, 0, 0, 1, 1, 0 \tag{16}$$

Die zugehörige Abbildung 3.1 ist eine Zusammensetzung der Abbildungen 1.0 und 1.1.

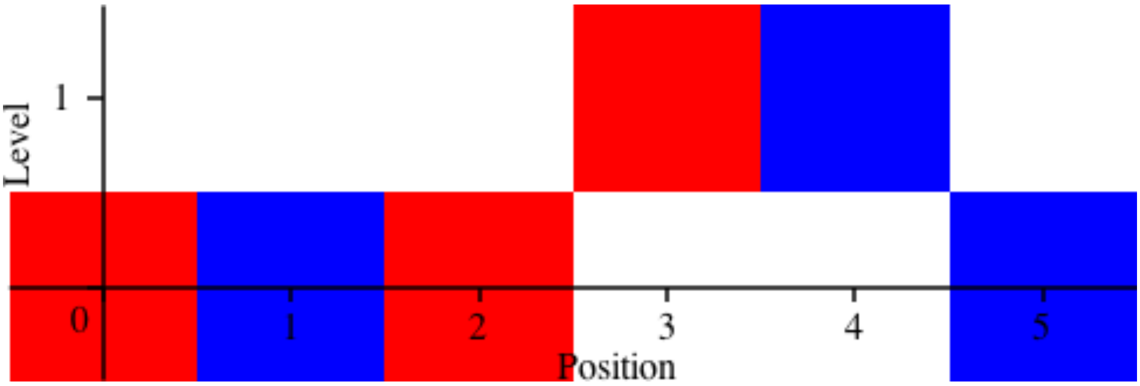

Abb. 3.1: Erster Schritt

Für $n = 2$ ergibt sich:

$$0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 0 \tag{17}$$

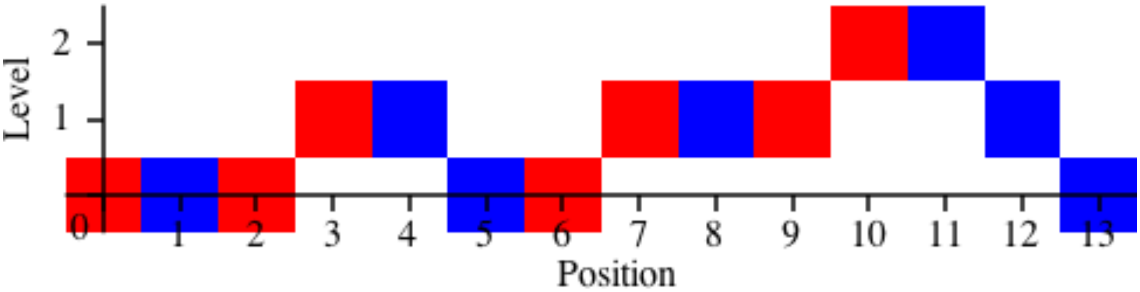

Abb. 3.2: Nächster Schritt

Für $n = 3$ erhalten wir:

$$0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 0 \tag{18}$$

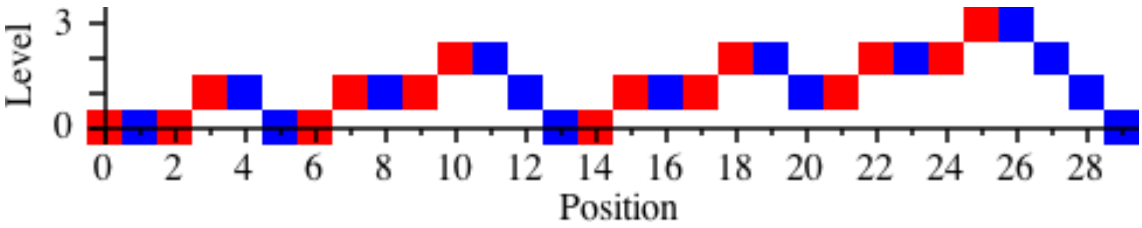

Abb. 3.3

Und noch für $n = 4$:

0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 0, 0, (19)
1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 0

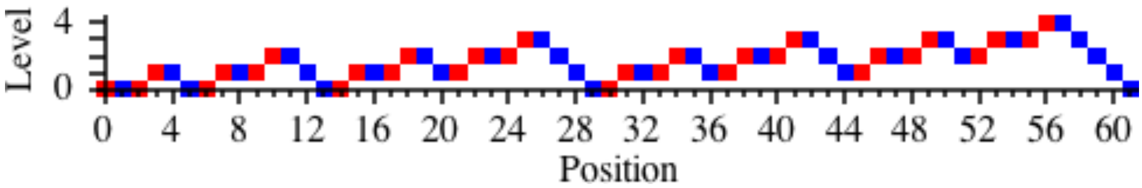

Abb. 3.4

Beim Schritt n haben wir $2(2^{n+1} - 1)$ Folgenglieder.
Gesucht ist eine explizite oder rekursive Darstellung dieser Folge.

5 Rekursive Berechnung der Level-Folge

Zunächst berechnen wir nach (12), (13) und (14) die Elemente $b_{n,k}$ und $c_{n,k}$.
Dann berechnen wir mit diesen Elementen:

```
for n from 0 to N do
 for k from 0 to 2*2^n-1 do
  a[2^(n+1)-2+k] := b[n,k]:
  d[2^(n+1)-2+k] := c[n,k]:
 end:
end:
```
(20)

Die Folge a_m ist die gesuchte Level-Folge. Die Folge d_m dient der Kolorierung der Abbildungen.

Wenn uns nur die Folge a_m interessiert, können wir die Berechnung von $c_{n,k}$ in (13) und (14) sowie die Berechnung von d_m in (20) weglassen.

Im Folgenden die Folgenglieder von a_0 bis a_{1021}.

0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 6, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 6, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

Websites

Hans Walser: Klammern

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Klammern/Klammern.htm