Hans Walser, [20201109]

Kollineare Punkte

1 Kreisringbögen

Wir beginnen mit drei konzentrischen Kreisringbögen (Abb. 1).

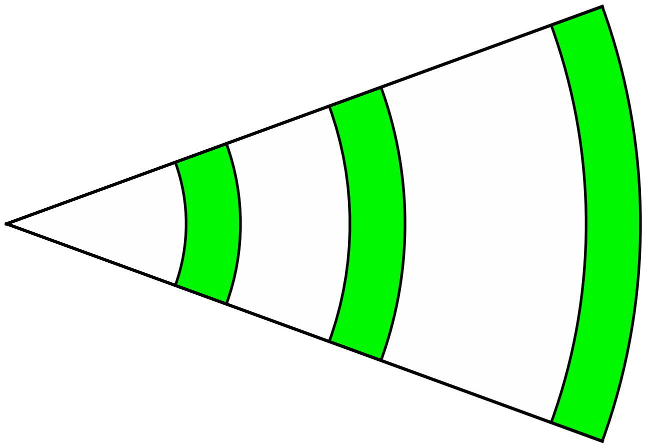

Abb. 1.1: Kreisringbögen

Die drei Kreisringbögen haben dasselbe Zentrum, denselben Öffnungswinkel und die gleiche Dicke. Die drei Innenradien sind beliebig.

Nun zeichnen wir die „Diagonalen" von links unten nach rechts oben in die Bögen (Abb. 1.2). Ebenso zeichnen wir die Mittelpunkte dieser Diagonalen.

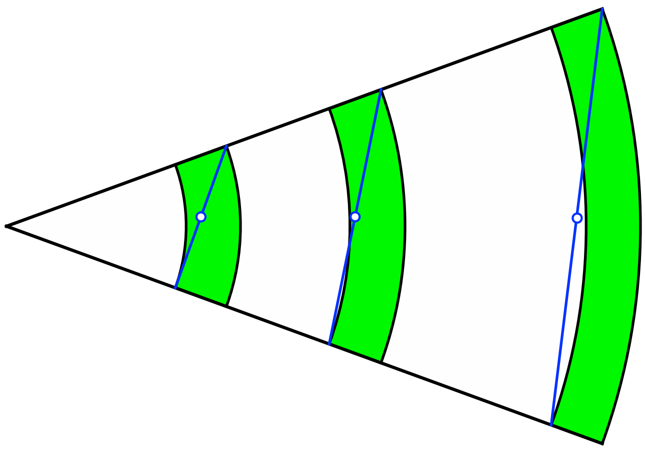

Abb. 1.2: Diagonalen mit Mittelpunkten

Diese Mittelpunkte liegen auf einer Geraden. Sie sind kollinear (Abb. 1.3). Die Gerade geht allerdings *nicht* durch das gemeinsame Zentrum der Kreisringbögen.

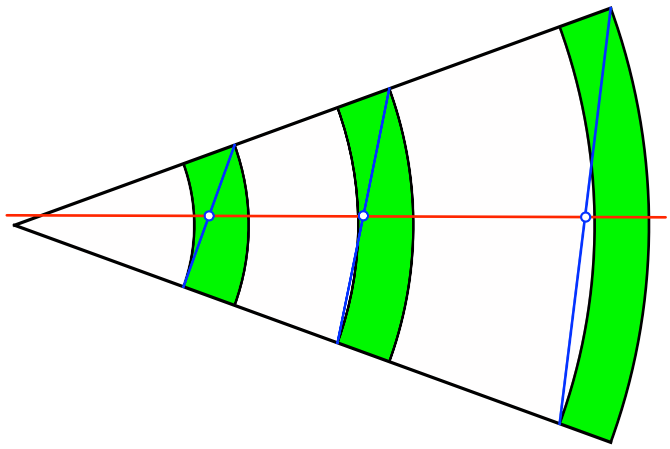

Abb. 1.3: Kollineare Punkte

Wenn wir die Diagonalen in einem anderen Teilverhältnis unterteilen, zum Beispiel im Verhältnis 2:1, ergeben sich ebenfalls kollineare Punkte (Abb. 1.4).

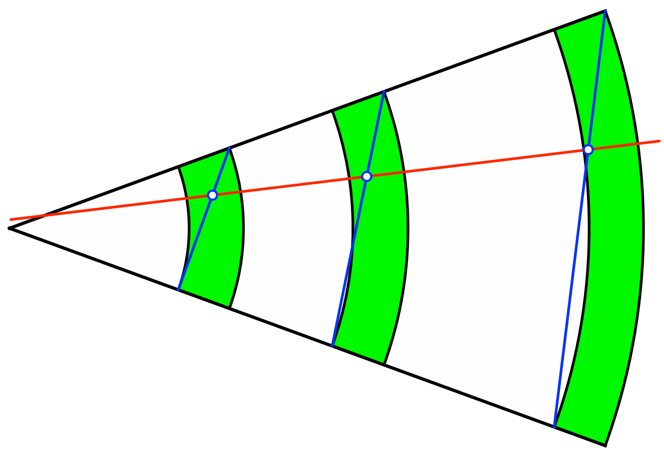

Abb. 1.4: Kollineare Drittelpunkte

2 Beweis

Der Beweis verläuft rechnerisch.

Wir betten die Figur in die Ebene der komplexen Zahlen ein, so dass das Zentrum der Kreisringbögen in den Nullpunkt zu liegen kommt und die untere Sektorgrenze auf die reelle Achse (Abb. 2).

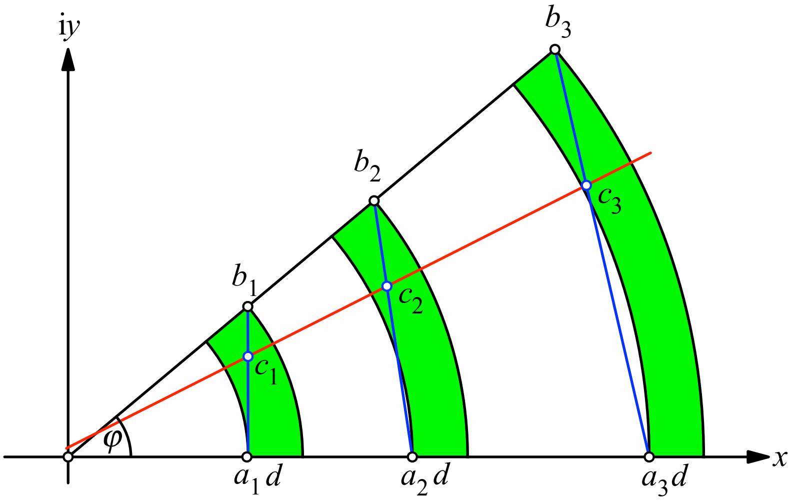

Abb.2: Beweisfigur

Die reellen Zahlen a_1, a_2 und a_3 sind einerseits die Innenradien der Kreisringbögen, andererseits aber auch die Ecken unten links. Die Ringbreite ist d.

Es ist dann:

$$b_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(a_j + d\right), \quad j = 1,2,3 \tag{1}$$

Weiter ist bei einer Unterteilung im Verhältnis $\lambda : (1-\lambda)$:

$$c_j = (1-\lambda)a_j + \lambda b_j \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) ergibt einen Term von der Form:

$$c_j = \alpha a_j + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \tag{3}$$

Um die Kollinearität von c_1, c_2 und c_3 zu zeigen, muss gelten:

$$\tfrac{c_3 - c_1}{c_2 - c_1} \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Einsetzen von (3) in (4) ergibt:

$$\frac{c_3-c_1}{c_2-c_1}=\frac{(\alpha a_3+\beta)-(\alpha a_1+\beta)}{(\alpha a_2+\beta)-(\alpha a_1+\beta)}=\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1} \tag{5}$$

Die rechte Seite von (5) ist aber reell. Damit ist die Kollinearität bewiesen.

3 Archimedische Spiralen

Die Abbildung 3 zeigt zwei Beispiele mit archimedischen Spiralen. Wo sind die Kreisringbögen?

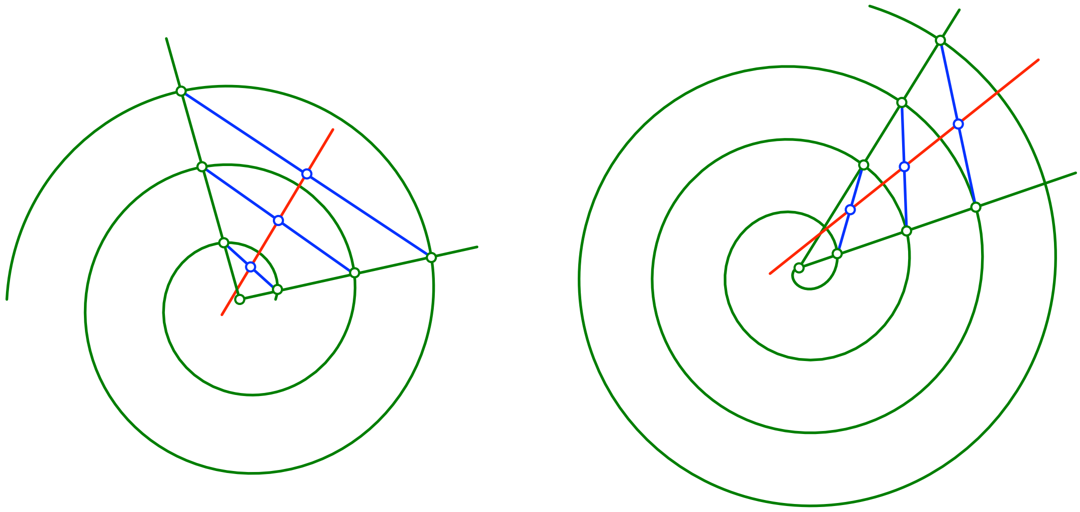

Abb. 3: Archimedische Spiralen

Websites

Hans Walser: Kollineare Punkte

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kollineare_Punkte3/Kollineare_Punkte3.htm

Hans Walser: Kollineare Punkte

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kollineare_Punkte2/Kollineare_Punkte2.htm

Hans Walser: Kollineare Punkte

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kollineare_Punkte1/Kollineare_Punkte1.htm

Hans Walser: Kollineare Punkte

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kollineare_Punkte/Kollineare_Punkte.htm

Hans Walser: Kollineare und kozyklische Punkte

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Koll_kozykl_Punkte/Koll_kozykl_Punkte.htm

Hans Walser: Schlussstriche

http://www.walser-h-m.ch/hans/Schlussstriche/