Hans Walser, [20200128]

# Kosinus-Approximationen

## 1 Worum geht es?

Für die Herleitung der Ableitung der Sinus-Funktion benötigt man den Grenzwert:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cos(\varepsilon)-1}{\varepsilon} \tag{1}$$

Der Trick besteht darin, die Kosinus-Funktion geeignet zu approximieren, um den Grenzwert zu bestimmen.

Zunächst aber das Vorgehen zur Ableitung.

## 2 Ableitung der Sinus-Funktion

Wir bilden den Differentialquotienten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(x+\varepsilon)-\sin(x)}{\varepsilon} \tag{2}$$

Umformung mit dem Additionstheorem:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(x+\varepsilon)-\sin(x)}{\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\varepsilon)+\cos(x)\sin(\varepsilon)-\sin(x)}{\varepsilon}\\ &= \sin(x)\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cos(\varepsilon)-1}{\varepsilon} + \cos(x)\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon}\end{aligned} \tag{3}$$

Mit einer separaten Überlegung wird im Unterricht gezeigt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1 \tag{4}$$

Wir haben noch (1) zu berechnen.

## 3 Approximationen

Als Approximation der Kosinus-Funktion in einer Umgebung von $x = 0$ bieten sich an (die Farben beziehen sich auf die Grafen dieser Funktionen in der Abbildung 1):

$$\begin{array}{ll} c : x \mapsto 1 & \text{schwarz} \\ d : x \mapsto \sqrt{1-x^2} & \text{blau} \\ e : x \mapsto 1-\frac{1}{2}x^2 & \text{grün} \\ r : x \mapsto 1-x^2 & \text{magenta} \\ g : x \mapsto 1+7x^2 & \text{zyan} \end{array} \tag{5}$$

### 3.1 Funktionsgrafen

In der Abbildung 1 ist die Kosinus-Kurve rot eingezeichnet, die Grafen der Approximationen gemäß den in (5) angegebenen Farben.

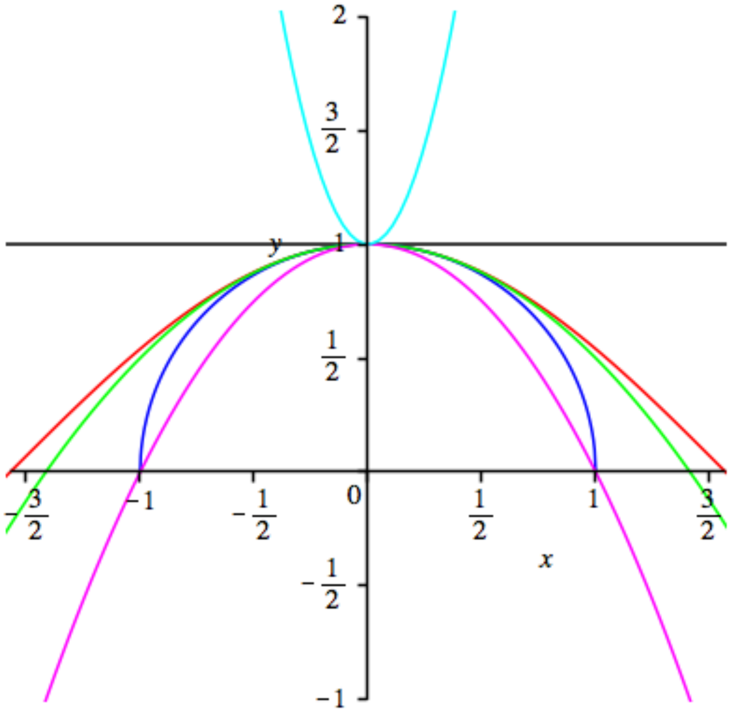


**Abb. 1: Funktionsgrafen**

Der optische Befund zeigt, dass die Funktionen $d$ und $e$ die Kosinus-Kurve in der Nähe der Stelle $x = 0$ recht gut approximieren, die anderen sind weniger gut.

### 3.2 Funktionswerte

Die Tabelle 1 zeigt die Funktionswerte in der Nähe der Stelle $x = 0$.

| $x$ | $\cos(x)$ | $c(x)$ | $d(x)$ | $e(x)$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.2 | 0.9800665778 | 1 | 0.9797958971 | 0.980 | 0.96 | 1.28 |
| 0.02 | 0.9998000067 | 1 | 0.9997999800 | 0.9998000000 | 0.9996000000 | 1.002800000 |
| 0.002 | 0.9999980000 | 1 | 0.9999980000 | 0.9999980000 | 0.9999960000 | 1.000028000 |
| 0.0002 | 0.9999999800 | 1 | 0.9999999800 | 0.9999999800 | 0.9999999600 | 1.000000280 |
| 0.00002 | 0.9999999998 | 1 | 0.9999999998 | 0.9999999998 | 0.9999999996 | 1.000000003 |
| 0.000002 | 1.000000000 | 1 | 1. | 1. | 1. | 1.000000000 |

**Tab. 1: Funktionswerte**

Wir sehen auch hier, dass die Funktionen $d$ und $e$ deutlich besser sind als die anderen.

### 3.3 Grenzwert

Das Interessante ist, dass die Güte der Approximation keinen Einfluss auf den Grenzwert (1) hat. Wir zeigen das an der spinnerten „Approximation“ mit $g$, der nach oben offenen Parabel. Es ist:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(1+7\varepsilon^2\right)-1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1+7\varepsilon^2-1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{7\varepsilon^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} 7\varepsilon = 0 \qquad (6)$$

Denselben Grenzwert 0 erhalten wir auch mit den anderen Approximationen. Am einfachsten ist es natürlich, mit der konstanten Funktion $c$ zu arbeiten.

Der Witz der Sache ist, dass wir in den Approximationen keinen linearen Anteil in $\varepsilon$ haben. Und der quadratische Anteil führt zum Grenzwert null.

Somit erhalten wir aus (3) für die Ableitung der Sinus-Funktion:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\left(x\right) = \cos\left(x\right) \qquad (7)$$

In (7) wird $x$ im Bogenmaß verwendet. Bei anderen Winkelmaßen kommt ein Korrekturfaktor als innere Ableitung (Kettenregel) dazu.

## 4 Kommentar zu den Approximationen

Die Approximation mit der konstanten Funktion $c$ ist sozusagen die Primitivlösung, die aber für unsere Zwecke völlig ausreicht.

Für die Approximation $d$ hängen wir an die Approximation für den Sinus für kleine $x$-Werte an:

$$\sin\left(x\right) \approx x \qquad (8)$$

Daraus ergibt sich:

$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} \approx \sqrt{1-x^2} \tag{9}$$

Dies ist die Approximation *d*. Sie ist nur reell für $-1 \leq x \leq +1$. Der Funktionsgraf ist die obere Hälfte des Einheitskreises. Dieser Kreis ist der Krümmungskreis der Kosinus-Kurve an der Stelle $x = 0$.

Aus *d* erhalten wir *e* mit dem „schmutzigen Trick von Newton“ (Schülerausdruck). Wir fügen unter der Wurzel von (9) noch den Ausdruck $\frac{1}{4}x^4$ ein. Dieser Ausdruck ist als vierte Potenz gegenüber dem quadratischen Anteil vernachlässigbar klein.

Somit haben wir:

$$\cos(x) \approx \sqrt{1-x^2+\tfrac{1}{4}x^4} = \sqrt{\left(1-\tfrac{1}{2}x^2\right)^2} = 1-\tfrac{1}{2}x^2 \tag{10}$$

Dies ist die Approximation *e*.

Bemerkung: Diese Approximation ist das Taylor-Polynom zweiten Grades der Kosinus-Funktion. Wir haben es jetzt aber *ohne* Differentialrechnung hergeleitet. Sie ist die beste quadratische Approximation der Kosinus-Funktion in der Nähe von $x = 0$. Sie hat an der Stelle $x = 0$ dieselbe Krümmung wie die Kosinus-Kurve.

Die Approximationen *f* und *g* dienen nur zur Illustration, dass in unserem Kontext der quadratische Anteil gar nicht nötig ist.