Hans Walser, [20191109]

Kreis

Anregung: Zvonimir Durcevic, Wien

1 Worum geht es?

Abstandseigenschaften des Kreises

2 Erinnerung an die Schule

Der Kreis wird in der Schule gewöhnlich definiert als die Menge aller Punkte P, welche von einem gegebenen Punkt M konstanten Abstand haben:

$$|MP| = c \tag{1}$$

Dabei sind M der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises. Wir haben den Mittelpunkt als einzigen Bezugsprunkt.

Der Thaleskreis hingegen wird definiert als die Menge aller Punkte P, welche die Eigenschaft

$$|AP|^2 + |BP|^2 = |AB|^2 \tag{2}$$

erfüllen. Wir haben die beiden Bezugspunkte A und B.

Wir werden sehen, dass (1) und (2) Sonderfälle eines allgemeineren Sachverhaltes sind.

3 Allgemein

Wir arbeiten mit n Punkten $A_1, A_2, ..., A_n$ als Bezugspunkten. Weiter seien n Gewichte $g_1, g_2, ..., g_n$ gegeben. Wir zeigen, dass die Menge aller Punkte P mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=1}^{n} g_k |A_k P|^2 = c^2 \tag{3}$$

einen Kreis definieren.

In einem kartesischen Koordinatensystem verwenden wir die Schreibweisen $A_k = (x_k, y_k), k \in \{1,2,...,n\}$ und $P = (x, y)$. Für (3) erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{n} g_k \left((x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \right) = c^2 \tag{4}$$

Weiter verwenden wir die Abkürzung:

$$g = \sum_{k=1}^{n} g_k \tag{5}$$

Mit Hilfe von (5) lässt sich (4) umformen zu:

$$\begin{aligned}\left(x - \tfrac{1}{g}\sum_{k=1}^{n} g_k x_k\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{g}\sum_{k=1}^{n} g_k y_k\right)^2 &= \\ = \tfrac{1}{g}\left(c^2 - \sum_{k=1}^{n} g_k\left(x_k^2 + y_k^2\right) + \tfrac{1}{g}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} g_k x_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} g_k y_k\right)^2\right)\right)&\end{aligned} \tag{6}$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises. Dies war zu zeigen.
Der Kreis hat den Mittelpunkt M:

$$M = \left(\tfrac{1}{g}\sum_{k=1}^{n} g_k x_k, \tfrac{1}{g}\sum_{k=1}^{n} g_k y_k\right) \tag{7}$$

Der Mittelpunkt M ist also das gewichtete arithmetische Mittel der n Bezugspunkte.
Für den Radius r ergibt sich:

$$r = \sqrt{\tfrac{1}{g}\left(c^2 - \sum_{k=1}^{n} g_k\left(x_k^2 + y_k^2\right) + \tfrac{1}{g}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} g_k x_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} g_k y_k\right)^2\right)\right)} \tag{8}$$

Wegen dem Minuszeichen im Radikanden von (8) ist der Radius nicht immer reell. Die Formel (8) erinnert an die Berechnung der empirischen Varianz.

4 Beispiele

4.1 Ein Bezugspunkt

Für $n=1, A_1=(0,0), g_1=1, c=5$ erhalten wir den Kreis der Abbildung 1. Das war zu erwarten.

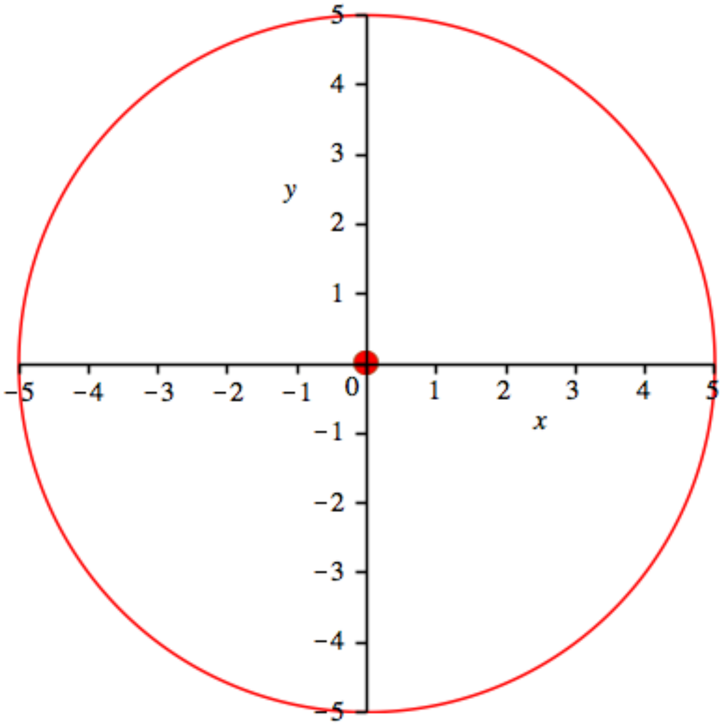

Abb. 1: Kreis mit Radius 5

Für $n = 1, A_1 = (0,0), g_1 = 2, c = 5$ (Verdoppelung des Gewichtes) erhalten wir den Kreis der Abbildung 2. Der Radius reduziert sich auf $r = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3.536$.

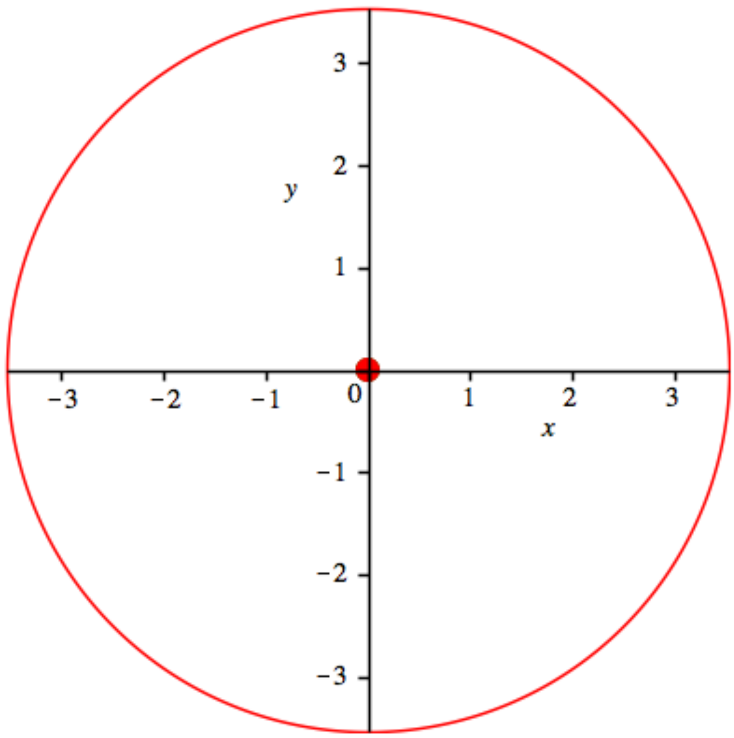

Abb. 2: Reduzierter Radius

Für $n=1, A_1=(0,0), g_1=\frac{1}{2}, c=5$ (Halbierung des Gewichtes) erhalten wir den Kreis der Abbildung 3. Der Radius vergrößert sich auf $r=5\sqrt{2}\approx 7.071$.

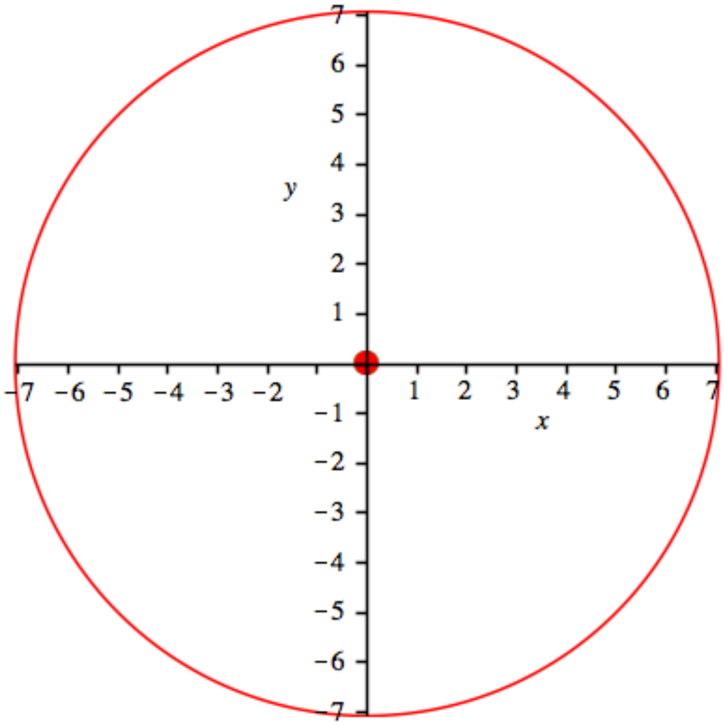

Abb. 3: Vergrößerter Radius

4.2 Zwei Bezugspunkte

Die Bezugspunkte sind im folgenden grün eigezeichnet, der Kreismittelpunkt rot.
In der Abbildung 4 ist $c = 2$. Wir erhalten den gewöhnlichen Thaleskreis.

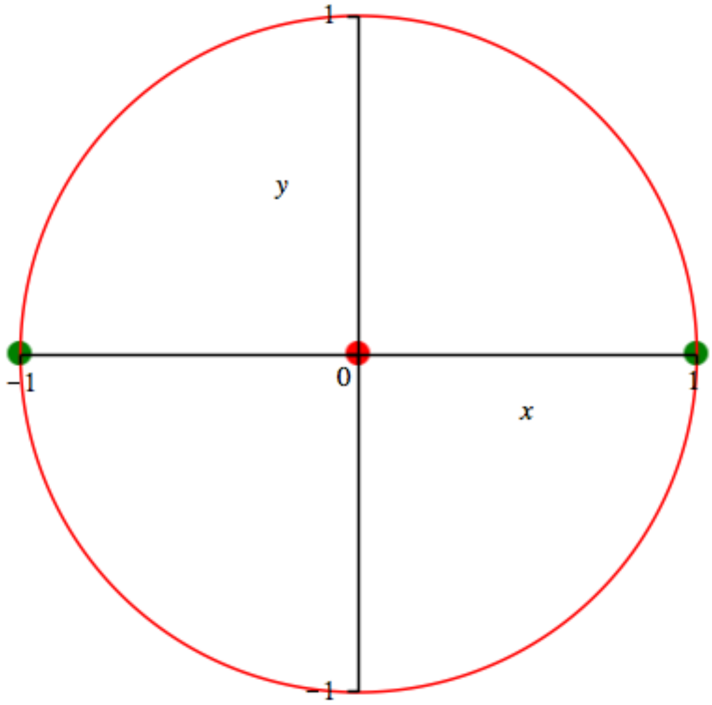

Abb. 4: Thaleskreis

4.2.1 Variation von c

Für c = 3, aber gleichbleibenden Bezugspunkten, erhalten wir einen vergrößerten Radius (Abb. 5). Der Radius ist $r = \frac{1}{2}\sqrt{14} \approx 1.871$.

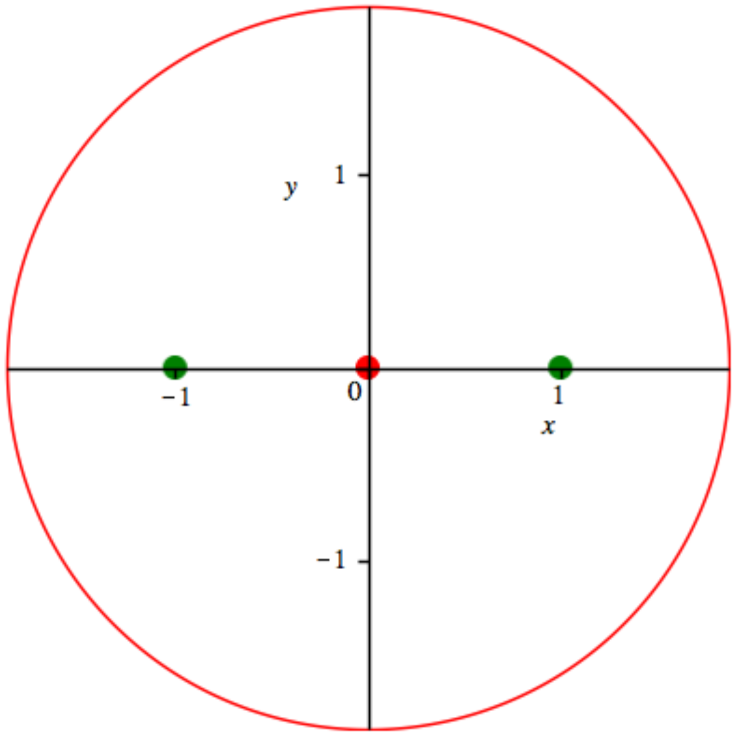

Abb. 5: Vergrößerter Radius

Für c = 1.5 ergibt sich ein verkleinerter Radius (Abb. 6). Der Radius ist $r = \frac{1}{4}\sqrt{2} \approx 0.354$.

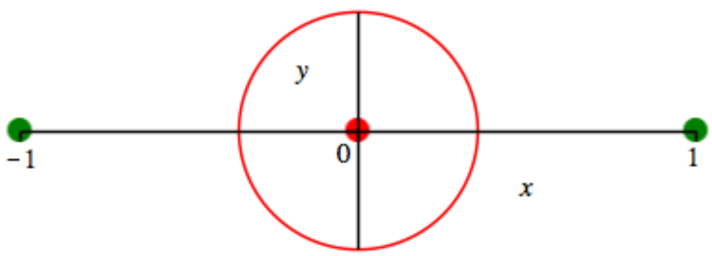

Abb. 6: Verkleinerter Radius

Für $c=\sqrt{2}\approx 1.414$ ergibt sich der Radius null. Für $c<\sqrt{2}$ ergibt sich ein rein imaginärer Radius.

4.2.2 Variation der Gewichte

Wir setzen $c = 2$, aber beide Gewichte auf $\frac{1}{2}$. Damit erhalten wir den Radius $r=\sqrt{3}\approx 1.732$ (Abb. 7).

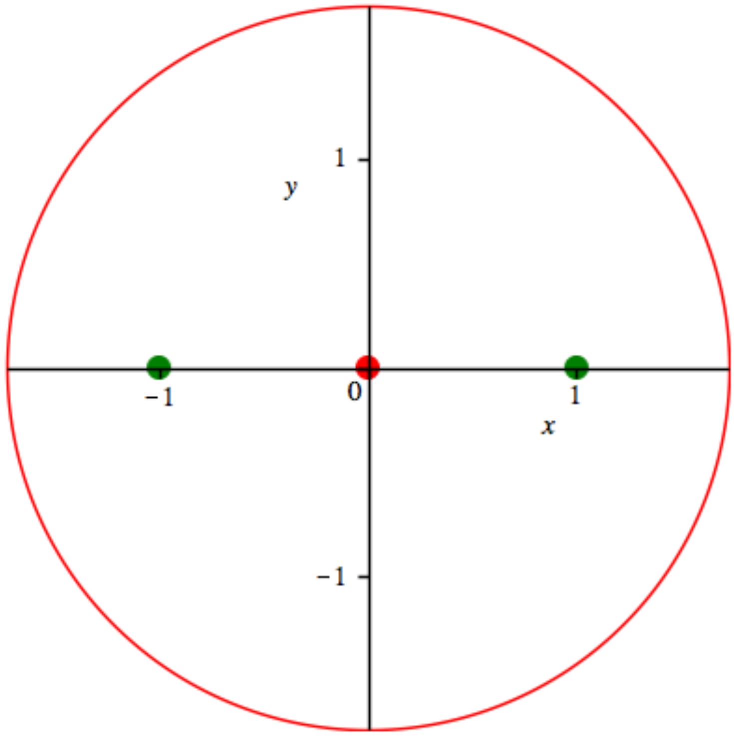

Abb. 7: Halbierung der Gewichte

Wenn wir nur ein Gewicht halbieren, ergibt sich eine asymmetrische Figur (Abb. 8). Das Gewicht des linken Punktes ist 1, das des rechten Punktes $\frac{1}{2}$ und $c=\frac{3}{2}$. Es ist $M=\left(-\frac{1}{3},0\right)$ und $r=\frac{1}{6}\sqrt{22}\approx 0.782$.

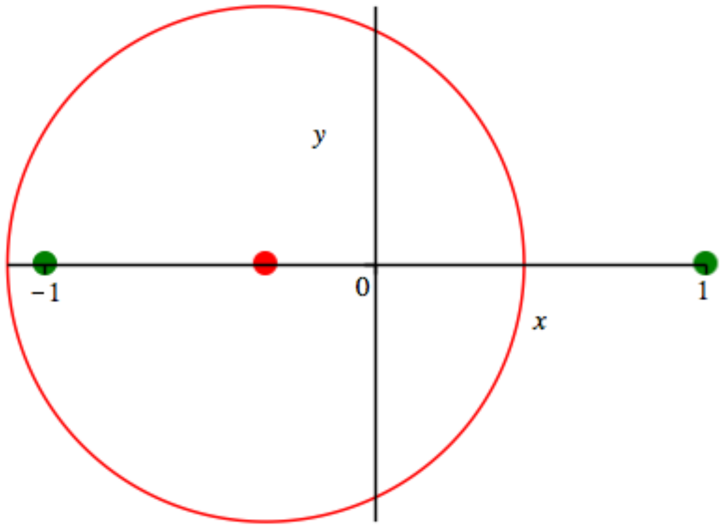

Abb. 8: Asymmetrisch

4.3 Drei Bezugspunkte

Im Beispiel der Abbildung 9 bilden die Bezugspunkte ein gleichseitiges Dreieck. Alle Gewichte sind 1 und $c = \sqrt{6}$. Wir erhalten den Umkreis.

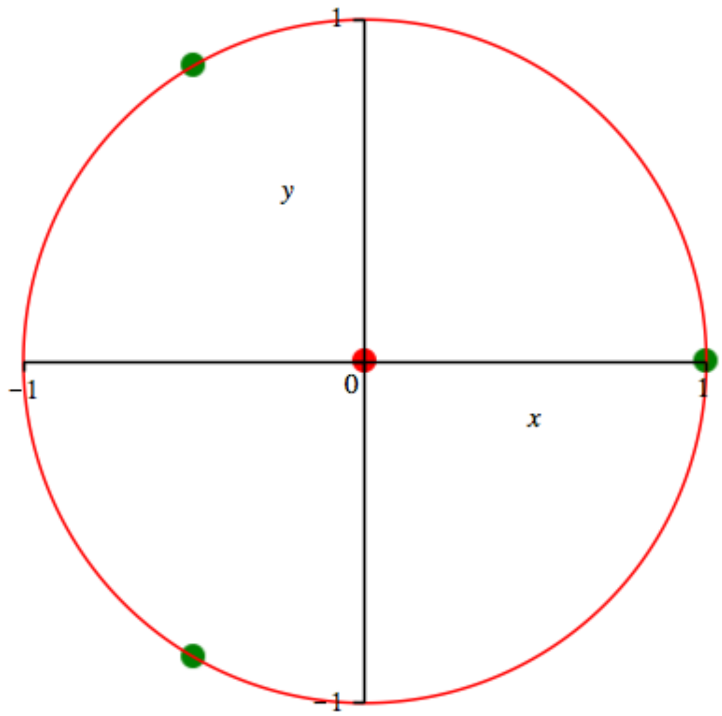

Abb. 9: Umkreis

Die Abbildung 10 zeigt ein unregelmäßiges Beispiel.

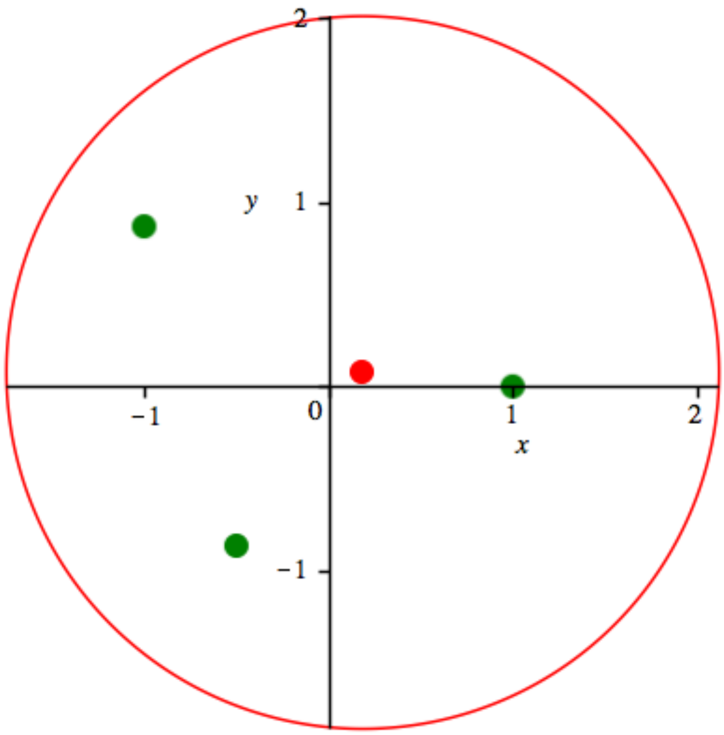

Abb. 10: Unregelmäßiges Beispiel

4.4 Vier Bezugspunkte

Im Beispiel der Abbildung 11 sind alle Gewichte 1 und $c = 2\sqrt{2}$. Wir erhalten den Umkreis.

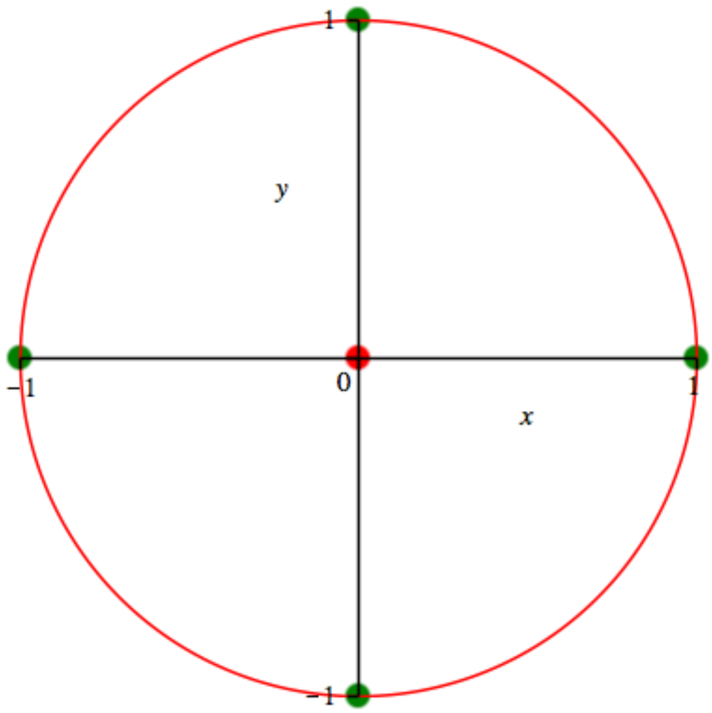

Abb. 11: Umkreis

Die Abbildung 12 zeigt ein unregelmäßiges Beispiel.

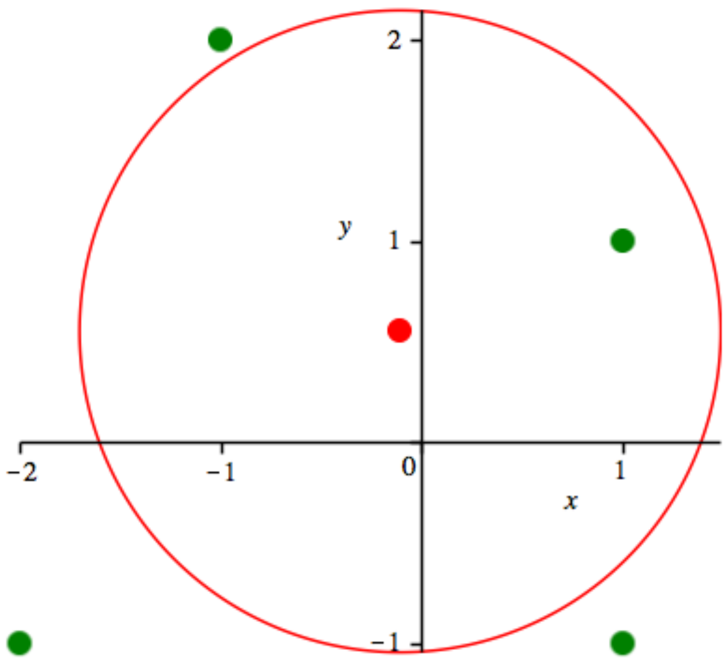

Abb. 12: Unregelmäßiges Beispiel

4.5 Fünf Bezugspunkte

Alle Gewichte 1. $c=\sqrt{10}$.

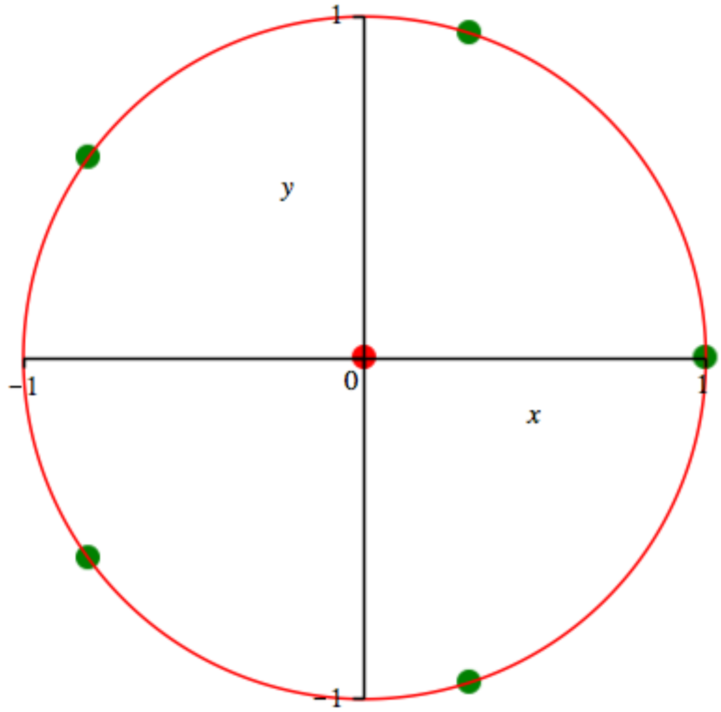

Abb. 13: Regelmäßiger Fall

Ich vermute, dass es allgemein für $c=\sqrt{2n}$ den Umkreis gibt.

5 Kugel

Die Überlegungen lassen sich sinngemäß auf die Kugel übertragen.