Hans Walser, [20211002]

Kreis und Parabel

1 Quadratische Parabel

Der größte Kreis, der in die quadratische Parabel $y = x^2$ so einfügt werden kann, dass er den Scheitel berührt, ist der Krümmungskreis (Abb. 1).

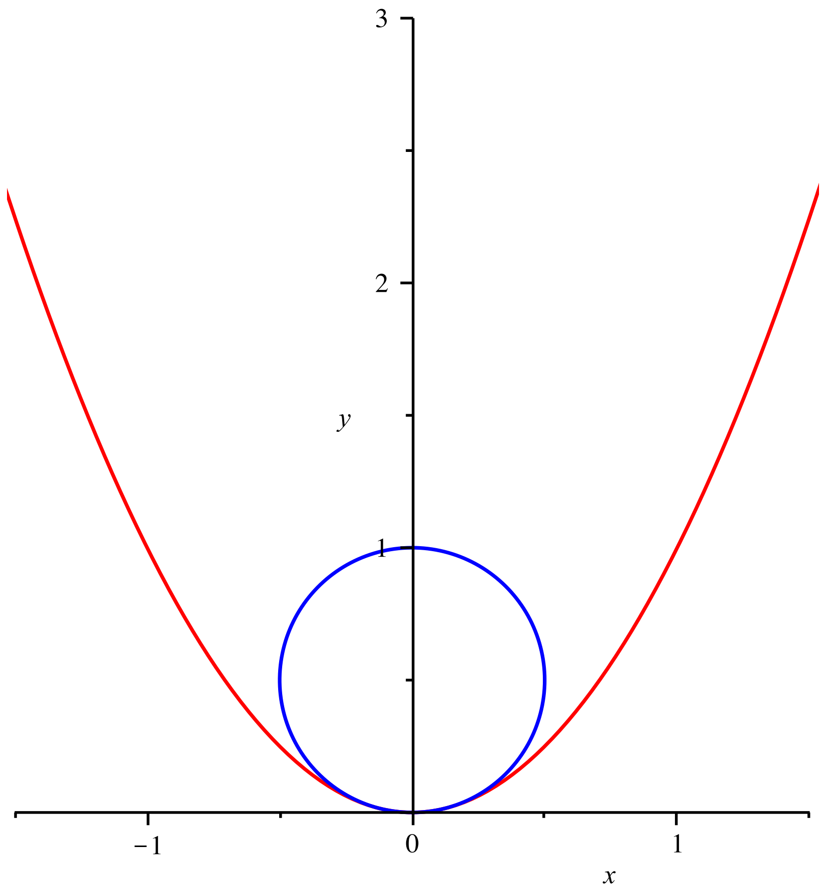

Abb. 1: Krümmungskreis in der quadratischen Parabel

2 Andere Parabeln

Leider ist die Idee mit dem Krümmungskreis nicht verallgemeinerungsfähig. Die Parabel mit der Gleichung $y = x^4$ hat im Scheitel die Krümmung null. Der Krümmungs“kreis“ ist eine Gerade. So geht das nicht.

3 Problemstellung

Welches ist der größte Kreis, der in die Parabel vierten Grades $y = x^4$ so eingefügt werden kann, dass er den Scheitel berührt? (Abb. 2)

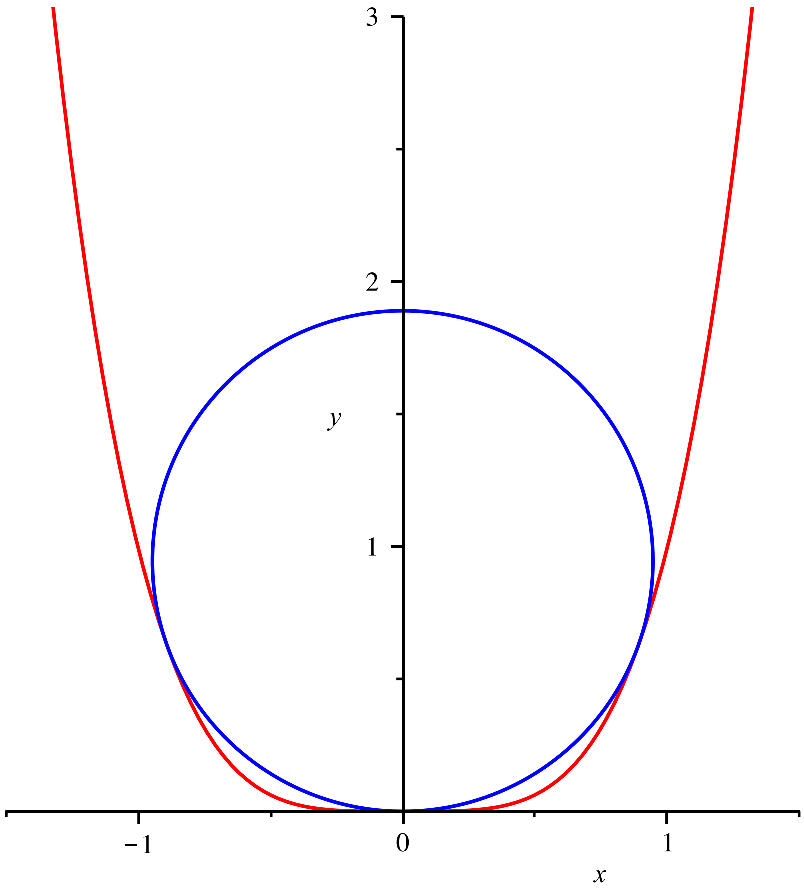

Abb. 2: Parabel vierten Grades

Der Kreis hat den Radius *r*:

$$r = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2} \approx 0.9449 \quad (1)$$

4 Allgemein

Wir studieren das Problem für die Kurve mit der Gleichung:

$$y = |x|^n \quad (2)$$

Der Berührungspunkt rechts habe die Koordinaten:

$$B\left(t, t^n\right) \tag{3}$$

Die Kurvennormale in B schneidet die y-Achse im Punkt M mit:

$$M\left(0, t^n + \frac{1}{nt^{n-2}}\right) \tag{4}$$

Dieser Punkt soll von B und vom Scheitelpunkt der Parabel denselben Abstand haben (nämlich den Radius des gesuchten Kreises). Dies führt auf die Bedingung:

$$t^2 + \frac{1}{n^2 t^{2n-4}} = \left(t^n + \frac{1}{nt^{n-2}}\right)^2 \tag{5}$$

Diese Gleichung hat für t die Lösung:

$$t = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{Re}\left(\frac{\ln\left(\frac{n-2}{n}\right)}{n-1}\right)}{2}} \tag{6}$$

Der zugehörige Kreisradius r ist:

$$r = \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{Re}\left(\frac{\ln\left(\frac{n-2}{n}\right)}{n-1}\right)}{2}}\right)^n + \frac{1}{n\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{Re}\left(\frac{\ln\left(\frac{n-2}{n}\right)}{n-1}\right)}{2}}\right)^{n-2}} \tag{7}$$

Die Tabelle 1 zeigt die ersten Werte.

n	t	r
2	0	0.5
3	0.7598356856	0.8773826754
4	0.8908987180	0.9449407875
5	0.9381427056	0.9689096204
6	0.9602645016	0.9800658524
7	0.9723501013	0.9861429902
8	0.9796609665	0.9898131656
9	0.9844155619	0.9921976249
10	0.9876796608	0.9938334860

Tab. 1: Werte

5 Weitere Beispiele

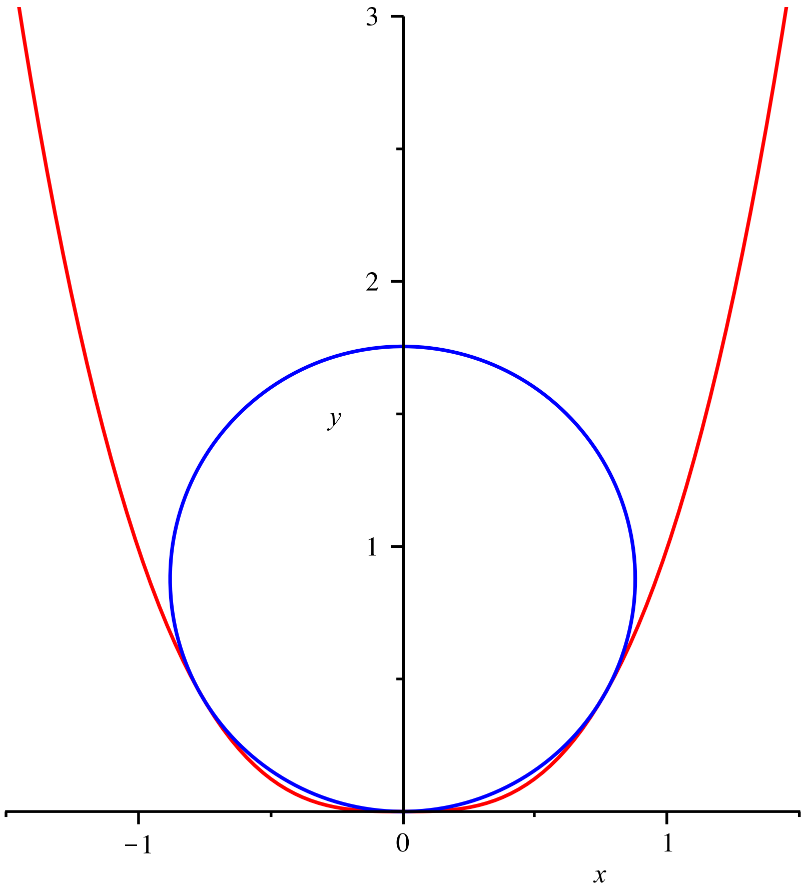

Abb. 3.1: *n* = 3

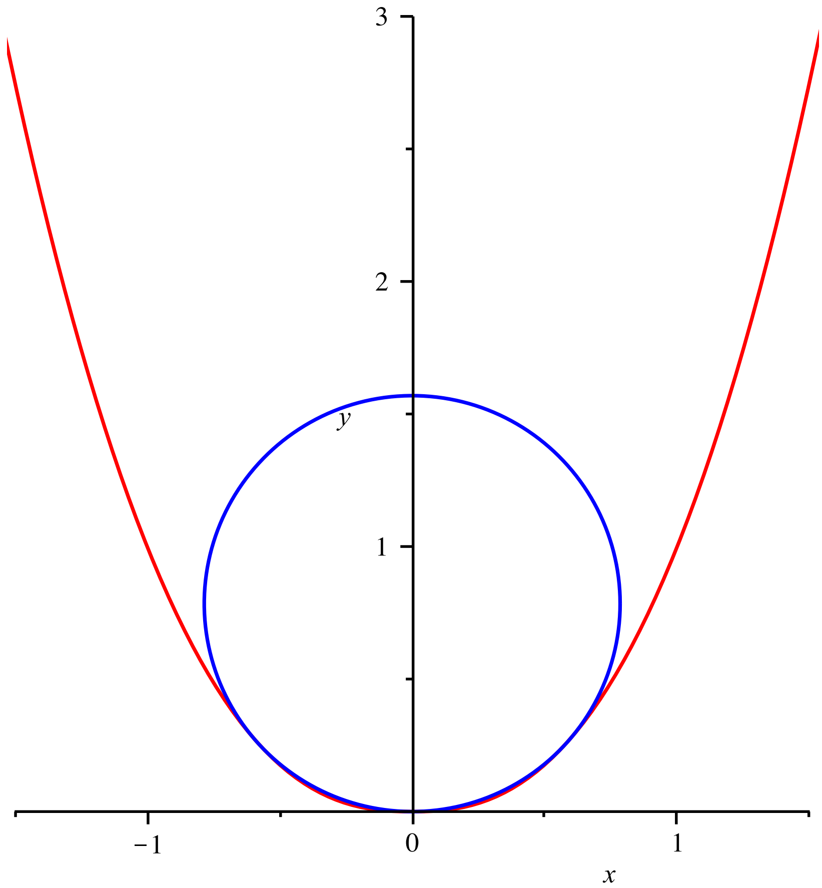

Abb. 3.2: n = 2.5

6 Negative Werte

Die Kurven für n und $2 - n$ rahmen denselben Kreis ein (Abb. 4).

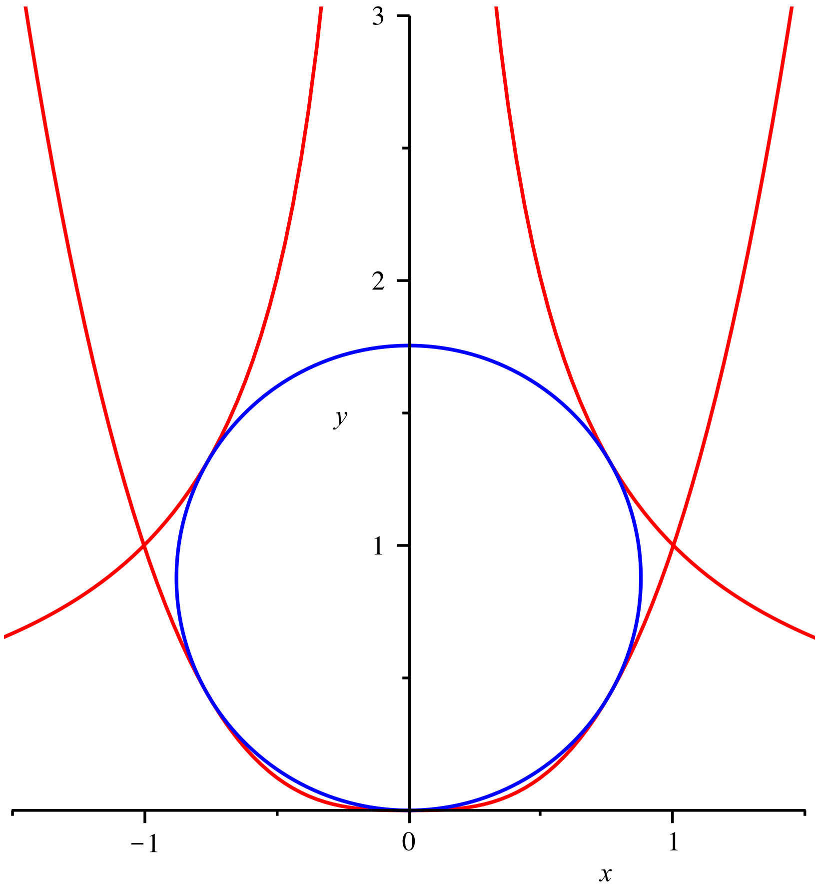

Abb. 4.1: *n* = 3 und *n* = –1

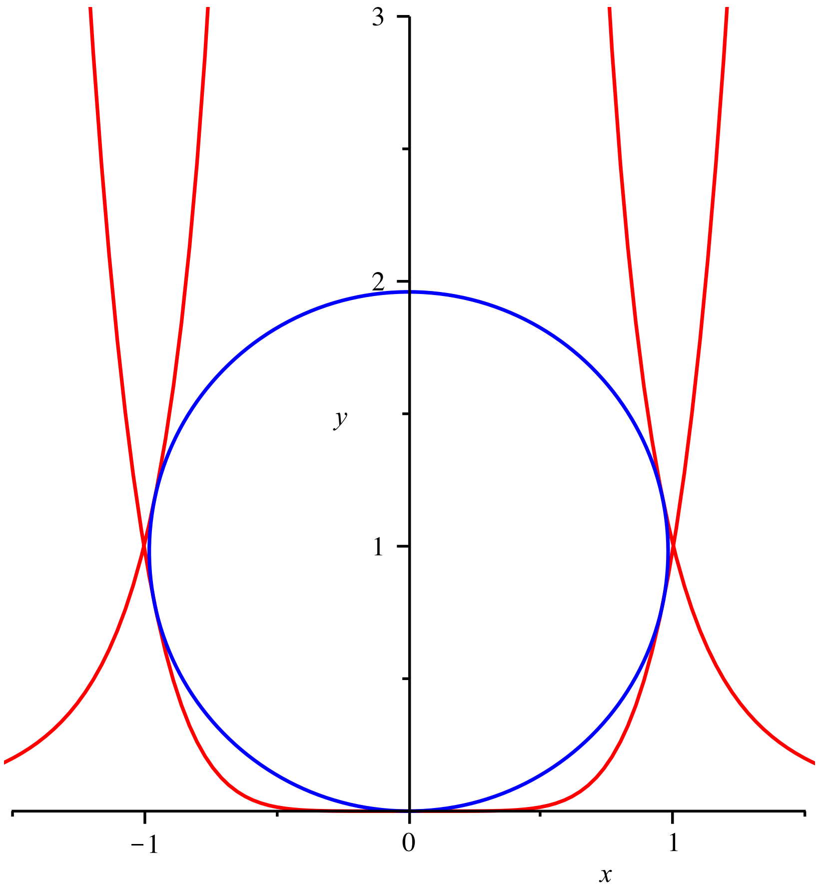

Abb. 4.2: *n* = 6 und *n* = –4

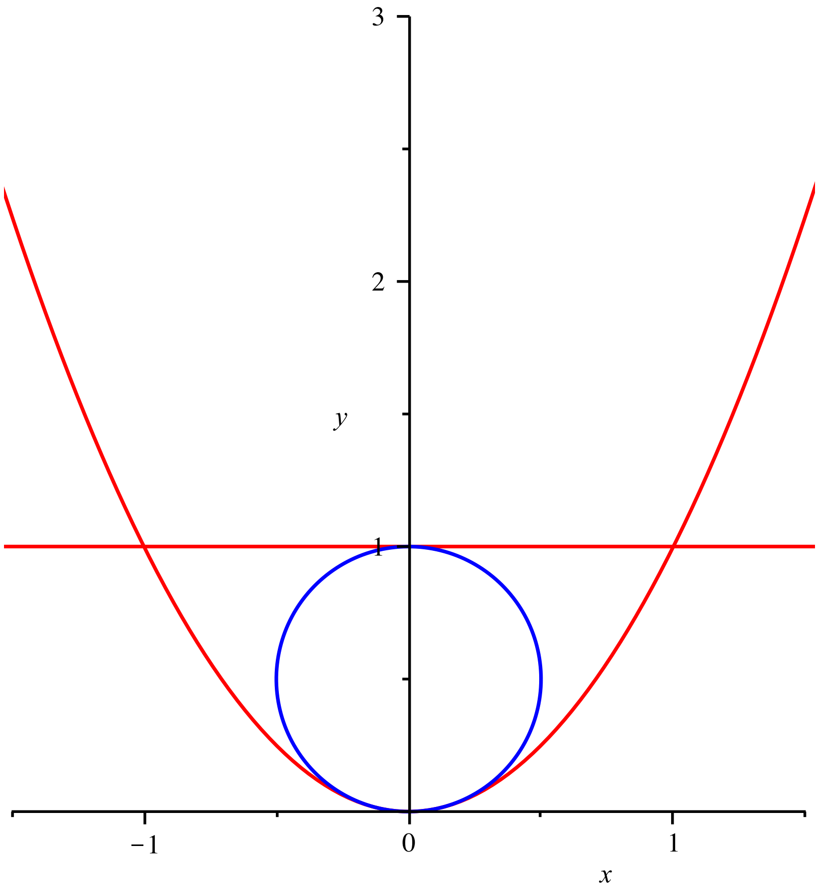

Abb. 4.3: *n* = 2 und *n* = 0