Hans Walser, [20190402]

Kreisdichte im Streifen

1 Sind die Kreise überall gleich dicht?

Ist der relative Flächenanteil der Kreise konstant?

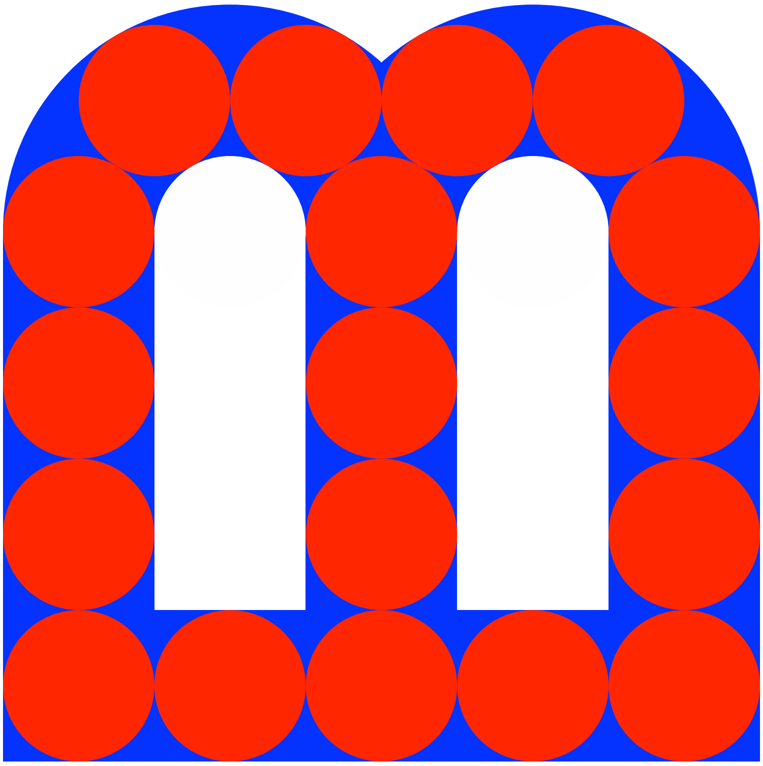

Abb. 1: Wo ist die Kreisdichte am größten?

2 Gerade und krumm

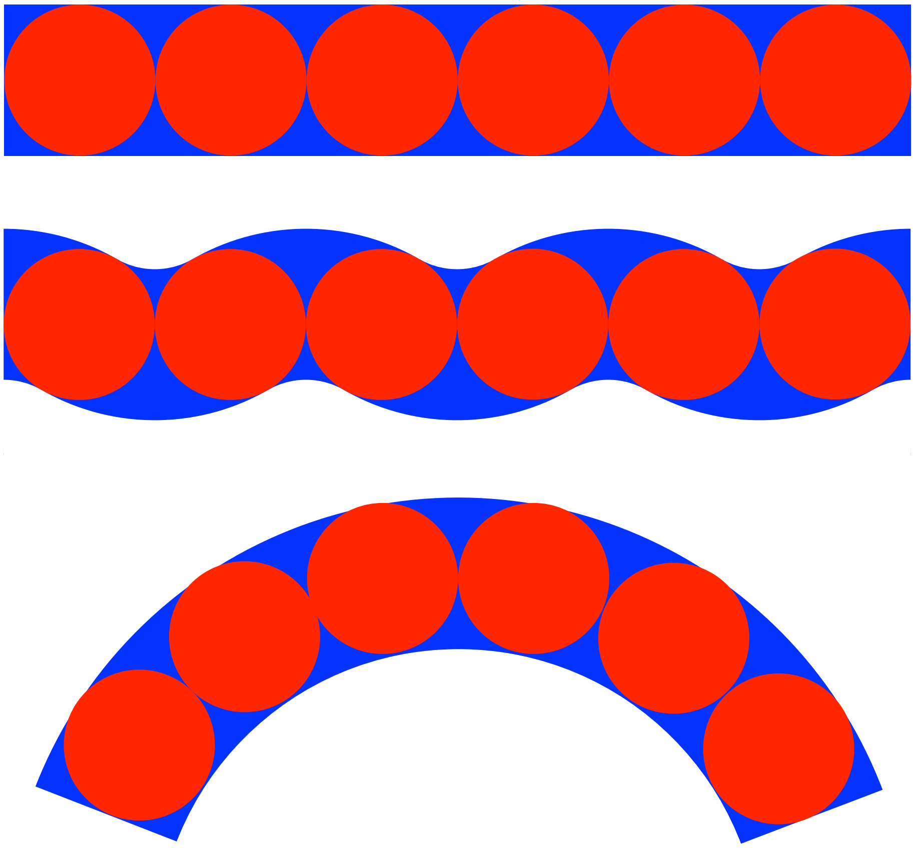

Abb. 2: Gerade und krumm

3 Berechnung im Sektor

Wir berechnen einen Sektor von Kreismitte zu Kreismitte.

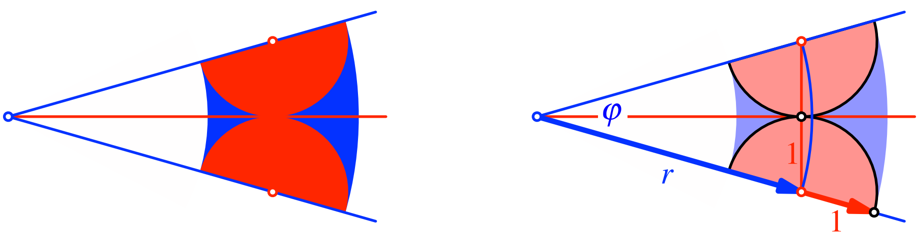

Abb. 3: Berechnung im Sektor. Bezeichnungen

Mit den Maßen und Bezeichnungen der Abbildung 3 erhalten wir zunächst die Kreisfläche = π. Der blaue Ringsektor hat den Öffnungswinkel φ. Daraus ergibt sich für den eingezeichneten Radius r:

$$r = \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \tag{1}$$

Der blaue Ringsektor hat damit den Außenradius $r + 1$ und den Innenradius $r - 1$. Für seinen Flächeninhalt A erhalten wir:

$$A = \tfrac{1}{2}\varphi\left(r+1\right)^2 - \tfrac{1}{2}\varphi\left(r-1\right)^2 = 2\varphi r = 4\frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \tag{2}$$

Wir haben weiter zwei Halbkreise, also einen Kreis mit dem Radius 1 und damit den absoluten Kreisanteil π. Für den relativen Kreisanteil ergibt sich:

$$\text{Kreisdichte } = \frac{\pi}{4}\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} \tag{3}$$

Wegen $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) < \frac{\varphi}{2}$ für positive Winkel φ ist die Kreisdichte für solche Winkel kleiner als π/4. Wegen

$$\lim_{\frac{\varphi}{2}\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}} = 1 \tag{4}$$

haben wir im geraden Fall die Kreisdichte π/4. Die Kreisdichte ist also im geraden Fall (oberstes Beispiel in Abb. 2) am größten. Dann gilt der Kalauer: je krümmer desto dünner.

Unkenntnis dieses Sachverhaltes kann zu widersprüchlichen Angaben über die Kreiszahl π führen.

4 Konstruktion des Streifens

Im obersten und im zweitobersten Beispiel der Abbildung 2 sind die sechs roten Kreise genau gleich angeordnet. Sie liegen aber in zwei verschiedenen Streifen. Dasselbe Phänomen haben wir bei den beiden Streifen der Abbildung 4. Das obere Beispiel ist „runder“ als das untere.

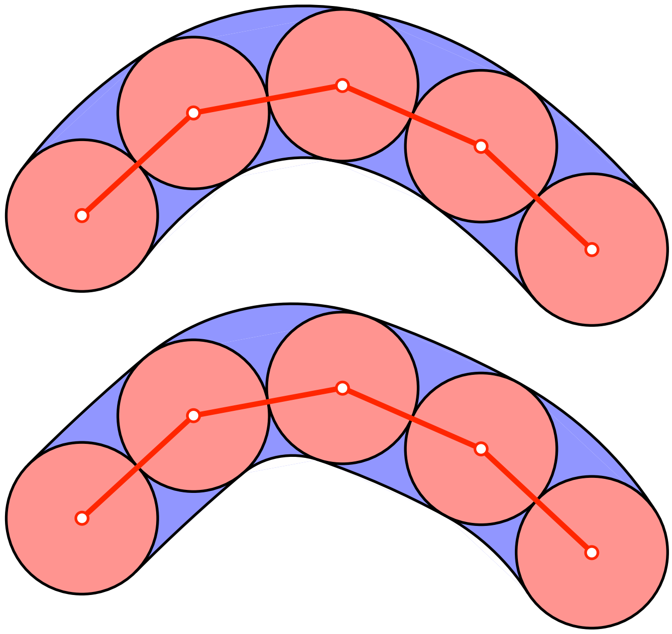

Abb. 4: Gleiche Kreisanordnung, verschiedene Streifen

Tatsächlich gibt es zu einer gegebenen Kreisanordnung eine einparametrige Schar von Streifen. Die Konstruktion geht exemplarisch wie folgt.

Zu den gegebenen Kreisen zeichnen wir die Berührungstangenten (rot in Abb. 5.1).

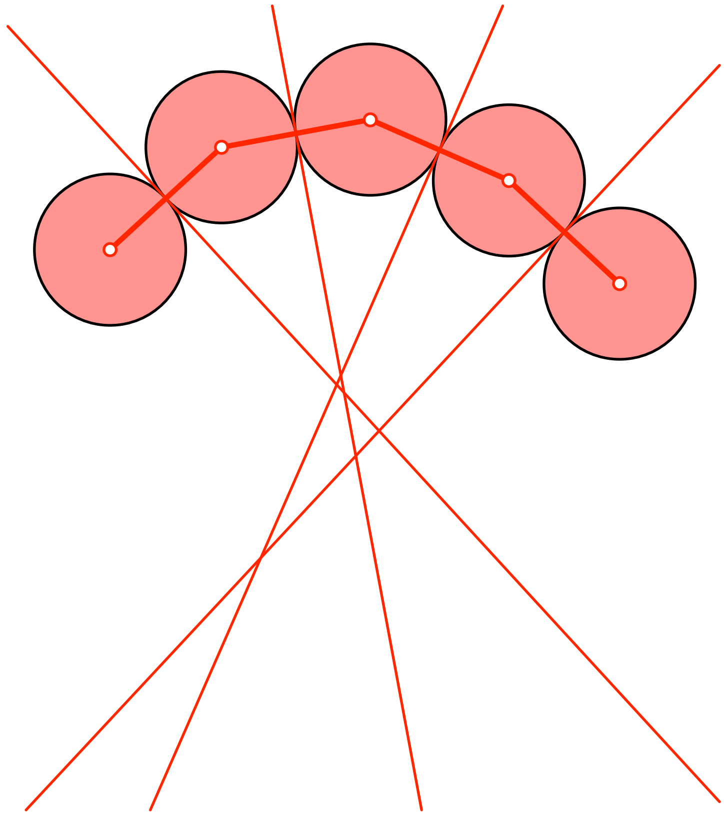

Abb. 5.1: Berührungstangenten

Nun wählen wir auf der ersten Berührungstangente einen Punkt (blau) als Zentrum des ersten Sektors (Abb. 5.2). Wegen dieser Wahlmöglichkeit haben wir eine einparametrige Schar.

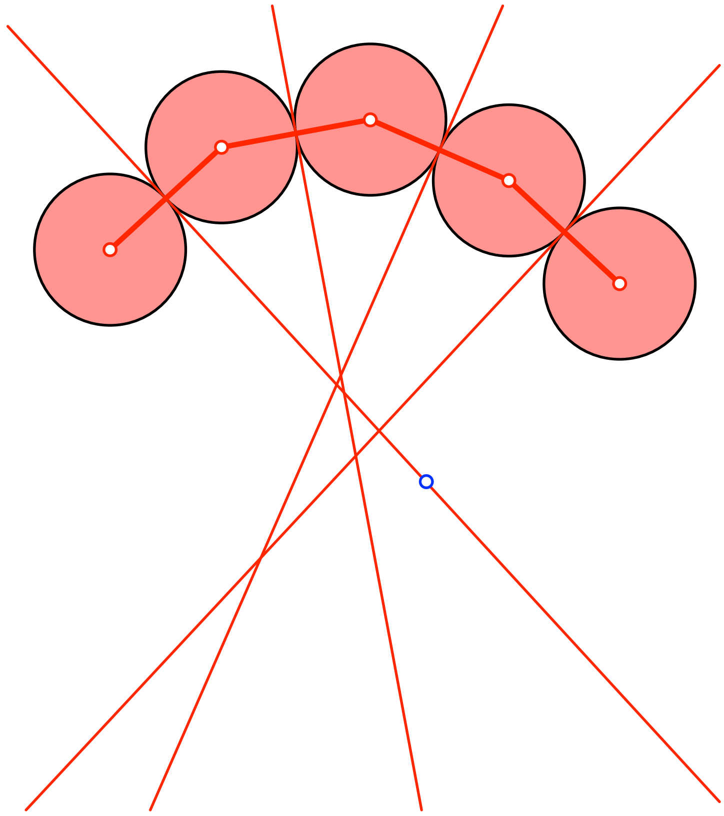

Abb. 5.2: Wahl des Zentrums für den ersten Sektor

Anschließend zeichnen wir die Sektorgrenzen (blau) und den ersten Sektor.

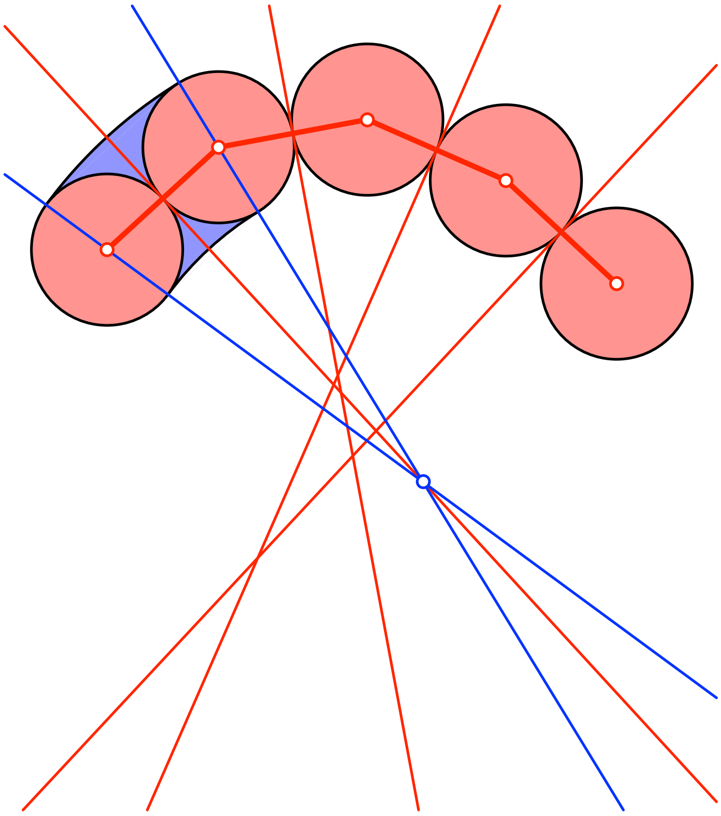

Abb. 5.3: Erster Sektor

An jetzt haben wir einen Zwanglauf. Das Zentrum des zweiten Sektors ist der Schnittpunkt der zweiten Berührungstangente mit der benachbarten Sektorgrenze des ersten Sektors (Abb. 5.4 mit Konstruktion des zweiten Sektors).

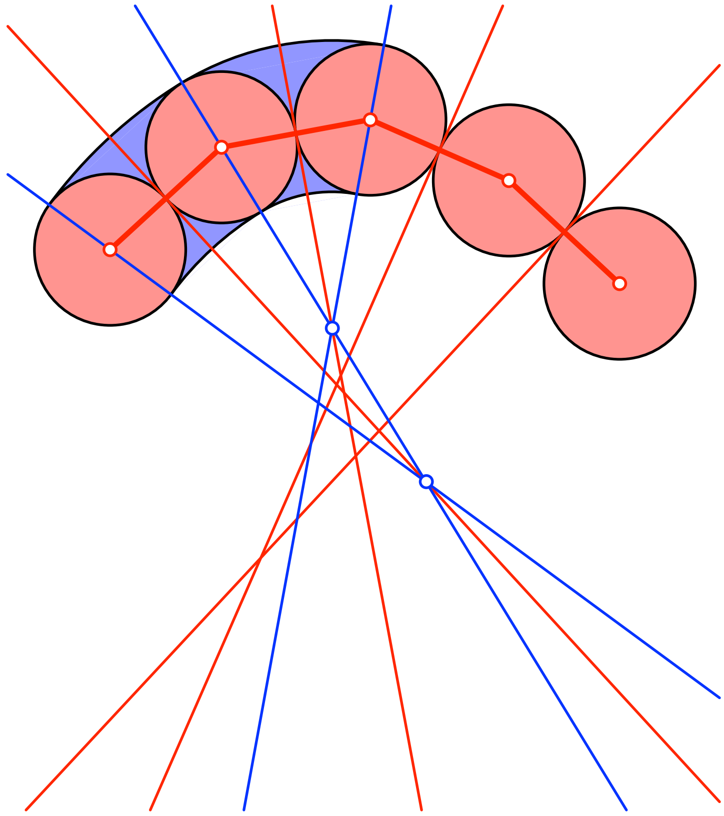

Abb. 5.4: Zweiter Sektor

Nun geht es weiter wie gehabt. Das Zentrum des dritten Sektors ist der Schnittpunkt der nachfolgenden Berührungstangente mit der benachbarten Sektorgrenze (Abb. 5.5).

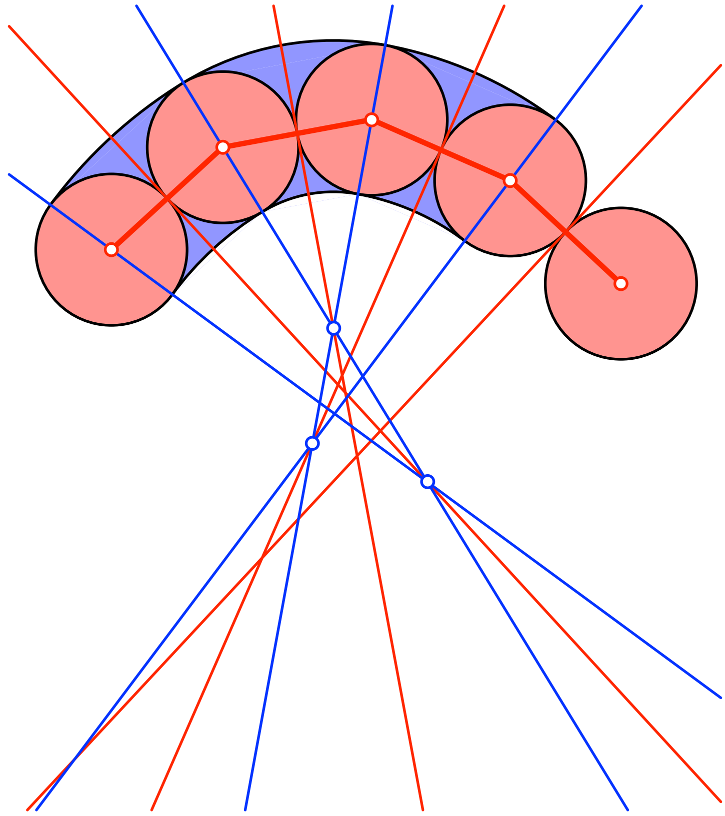

Abb. 5.5: Nächster Sektor

Und schon der letzte Sektor (Abb. 5.6).

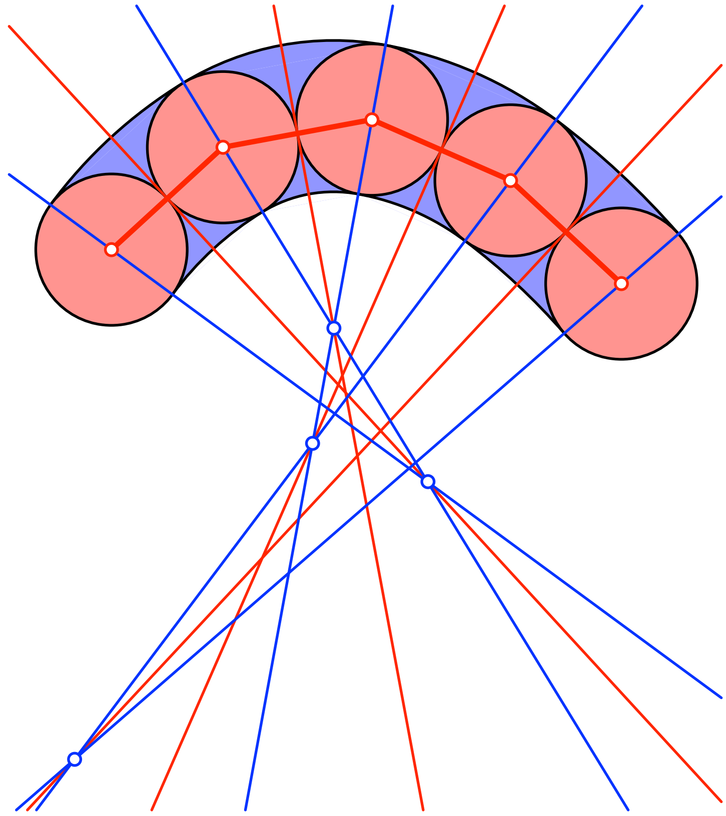

Abb. 5.6: Letzter Sektor

Websites

Hans Walser: $\pi = 3$
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pi_gleich_drei/Pi_gleich_drei.htm