Hans Walser, [20080203a]

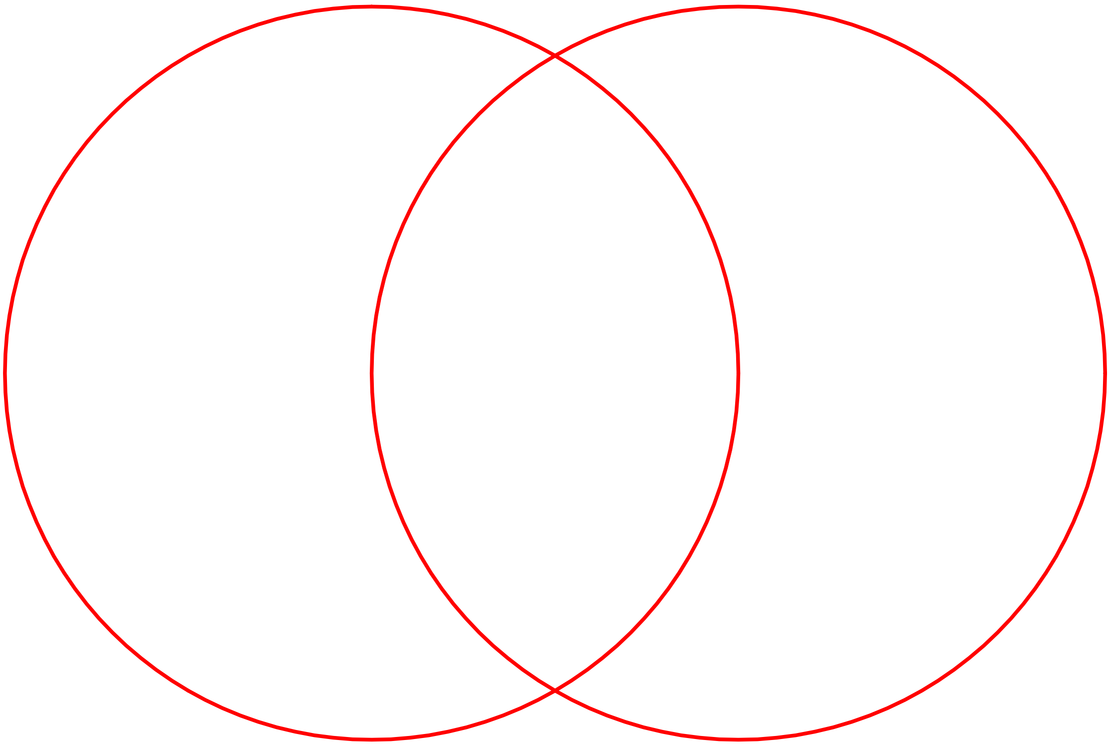
Kreisfiguren

1 Worum es geht

Zu $n \in \mathbb{N}$ werden 2^n gleich große Kreise gezeichnet, von denen jeder durch die Zentren von *n* anderen Kreisen verläuft.

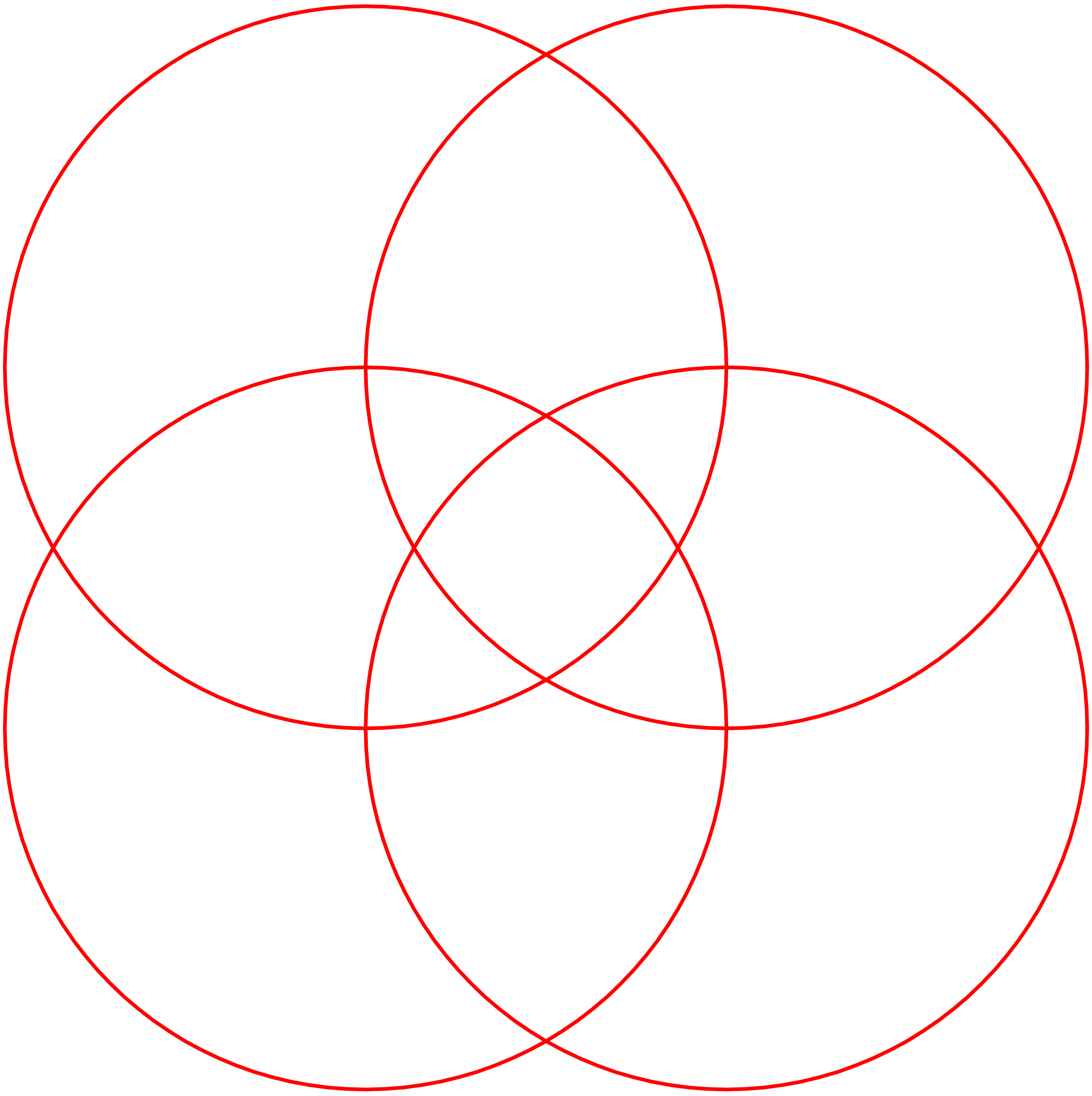
2 Beispiele

2.1 *n* = 1



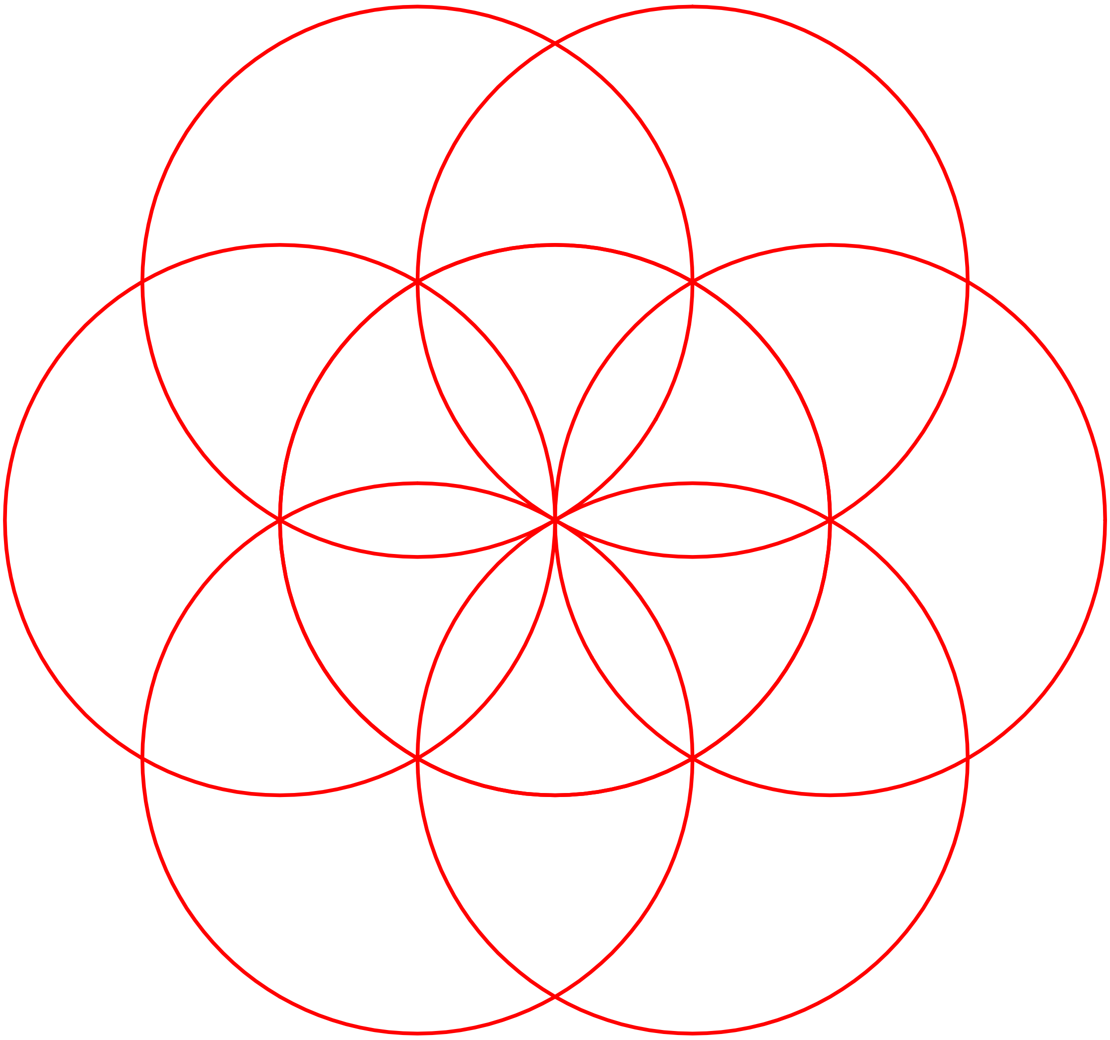
Zwei Kreise

2.2 $n = 2$



Vier Kreise

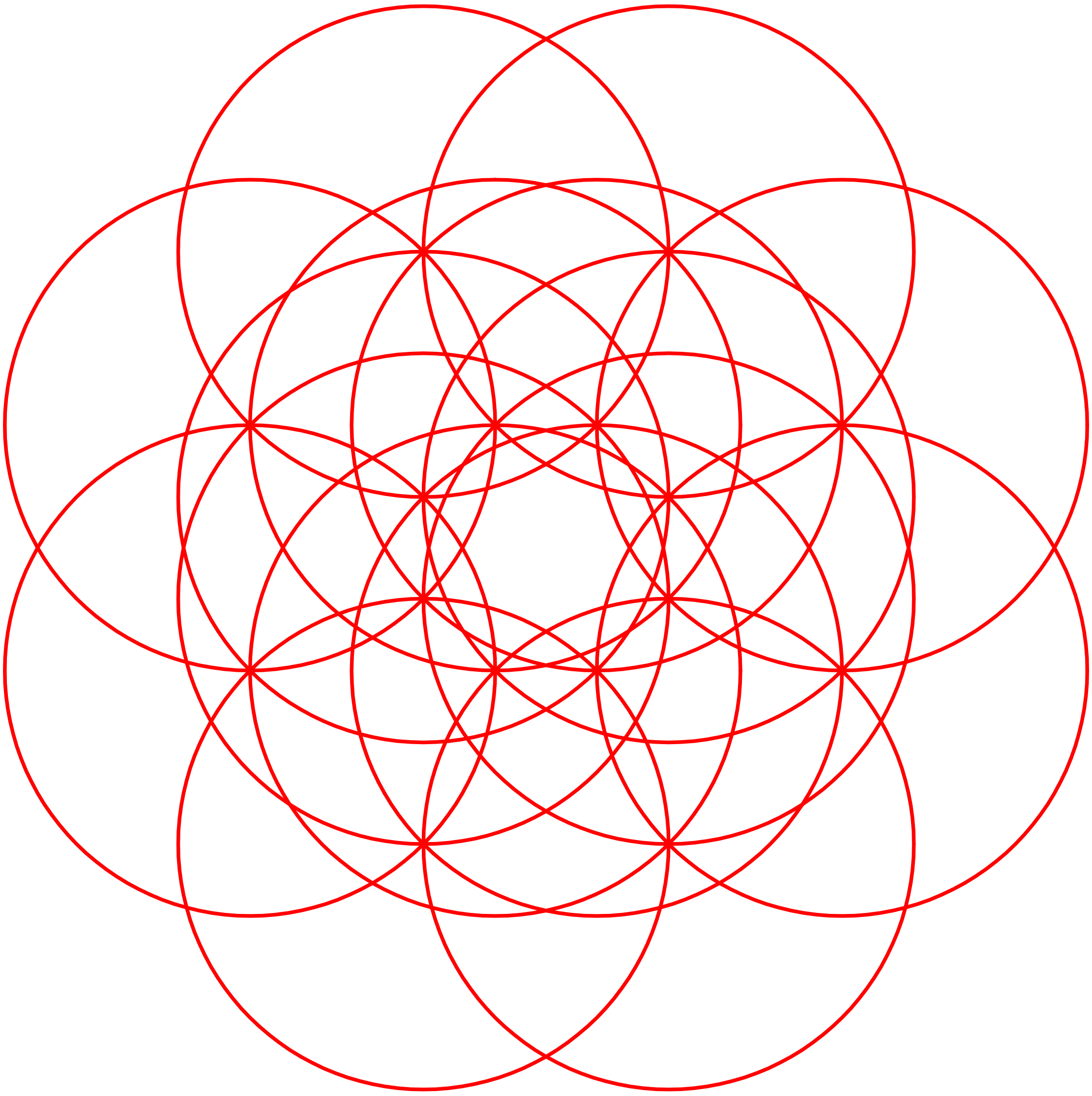
2.3 $n = 3$



Acht Kreise

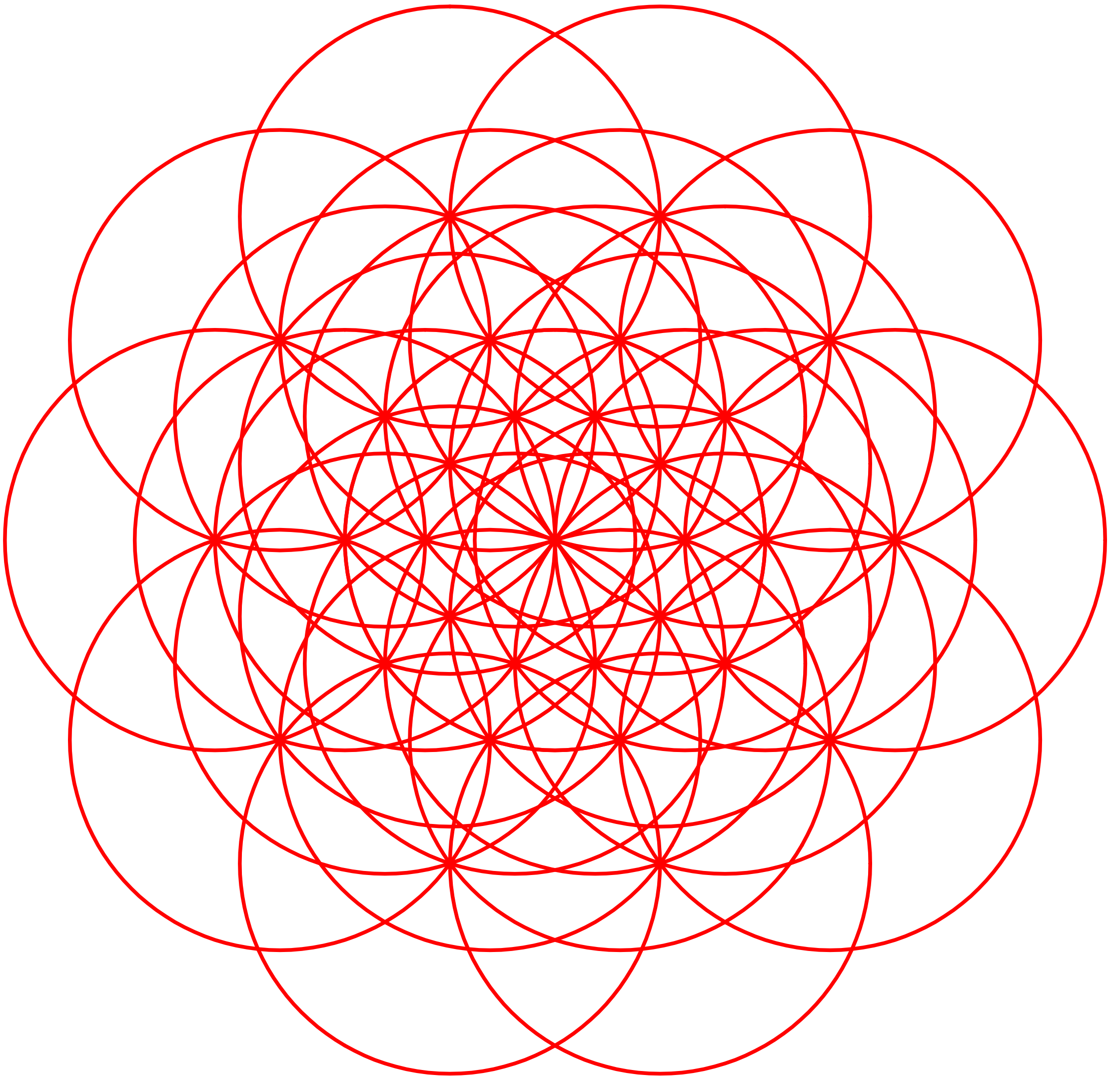
Eigentlich sehen wir nur sieben Kreise, von denen einer, der zentrale Kreis, durch die Zentren der sechs anderen Kreise verläuft. Wir müssen diesen Kreis doppelt zählen und jeden von den beiden alternierend durch die Zentren von je drei Kreisen verlaufend denken. Wie es zu dieser eigenartigen Zählweise kommt, wird später erklärt.

2.4 $n = 4$



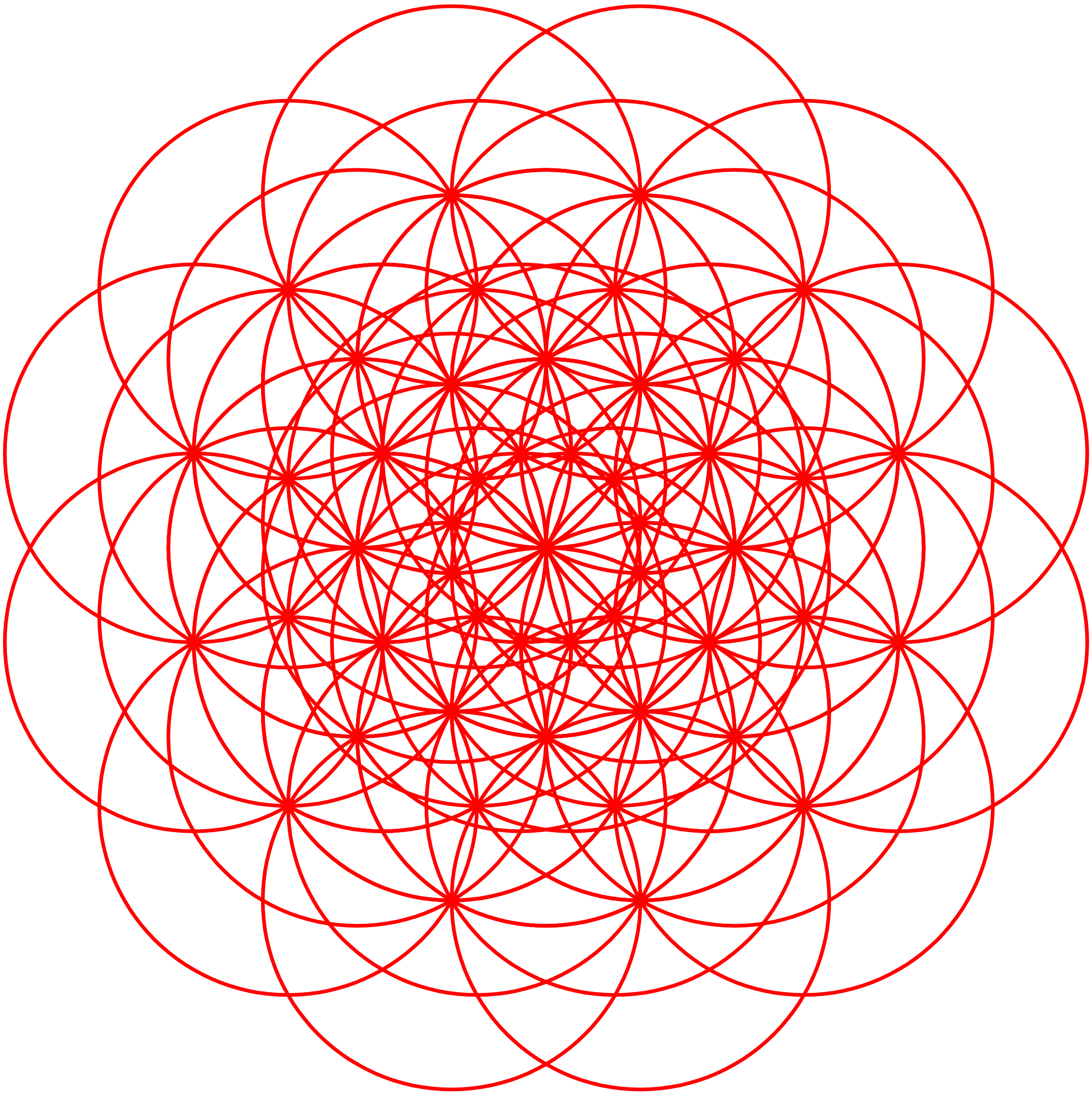
16 Kreise

2.5 *n* = 5



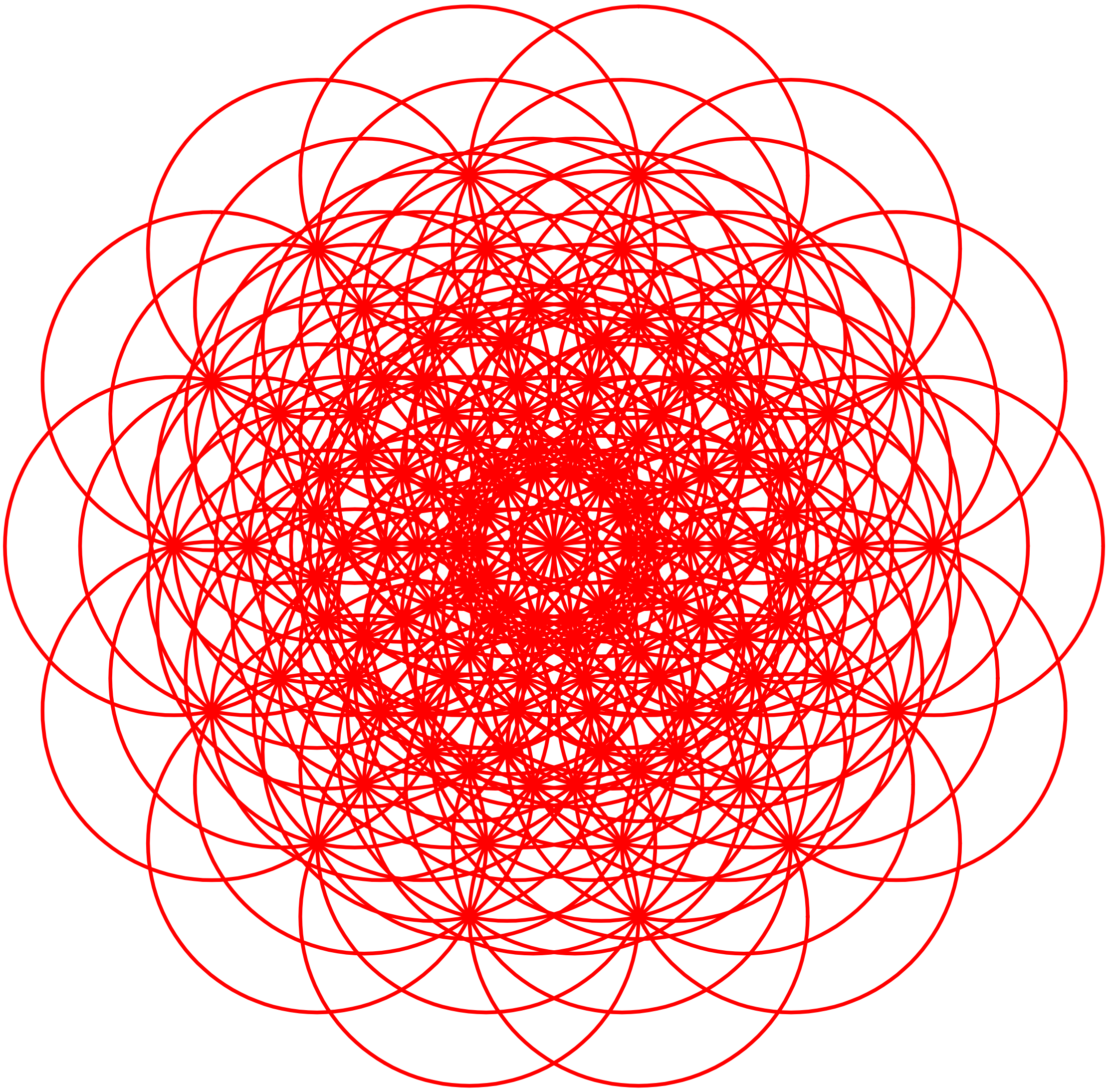
32 = 2^5 Kreise

2.6 $n = 6$



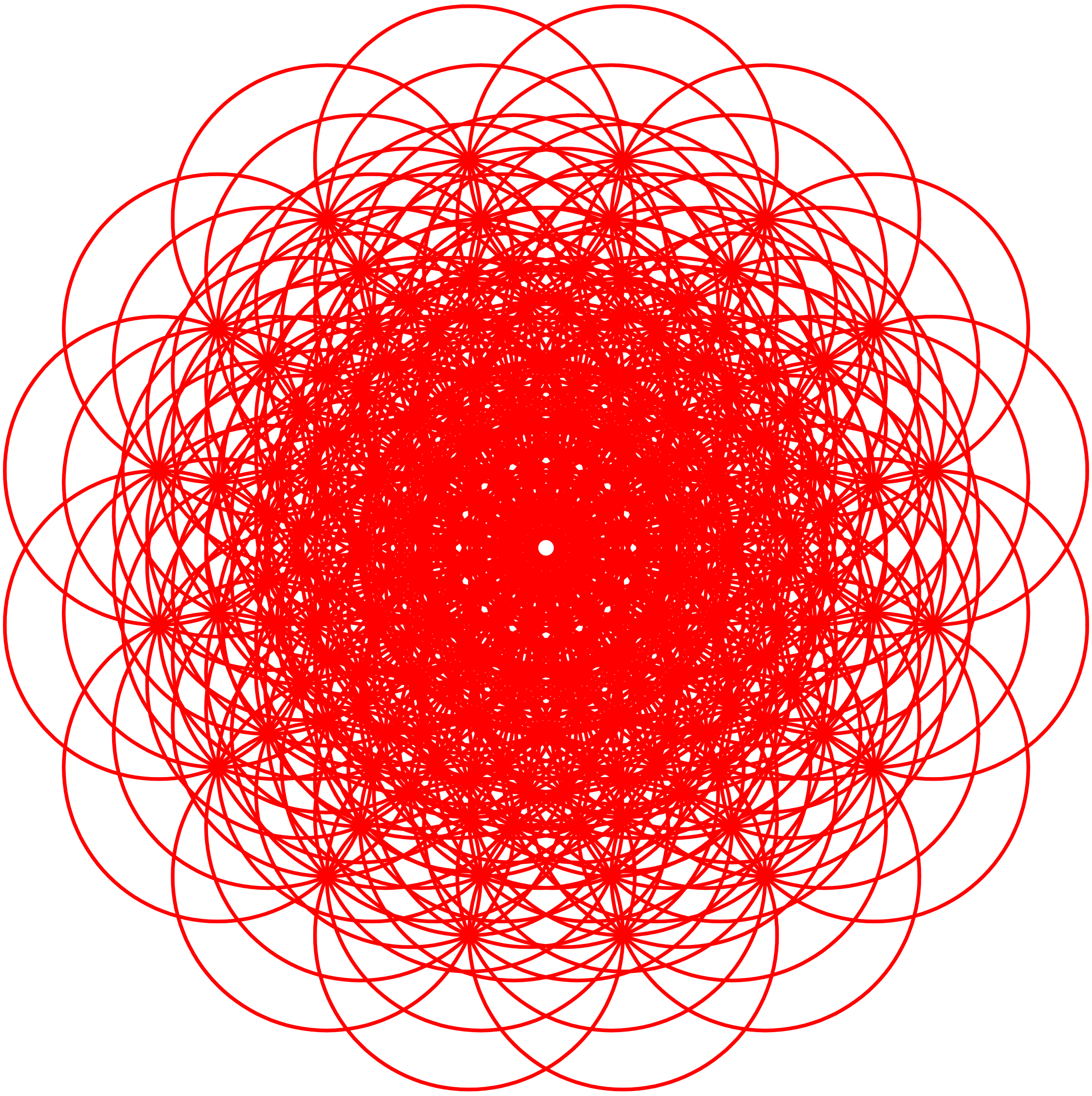
64 = 2^6 Kreise

2.7 $n = 7$



$128 = 2^7$ Kreise

2.8 $n = 8$



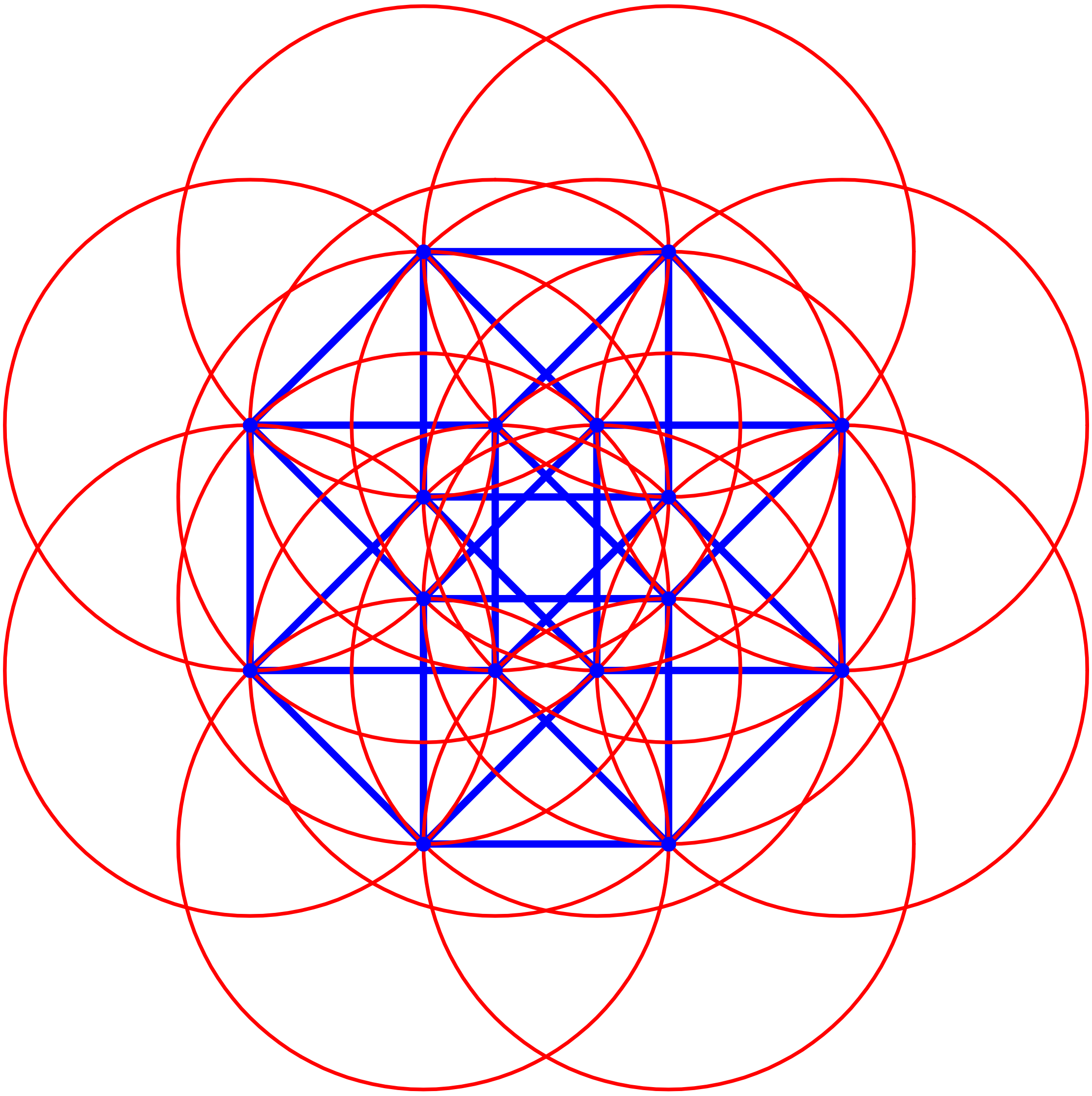
256 = 2^8 Kreise

3 Hintergrund

Wir zeichnen einen n-dimensionalen Hyperwürfel in isometrischer Darstellung. Von jeder Ecke aus verlaufen kann n gleich stark verkürzte Kanten. Daher kann jeder Ecke als Zentrum eines Kreises verstanden werden, der durch n Nachbarecken verläuft.

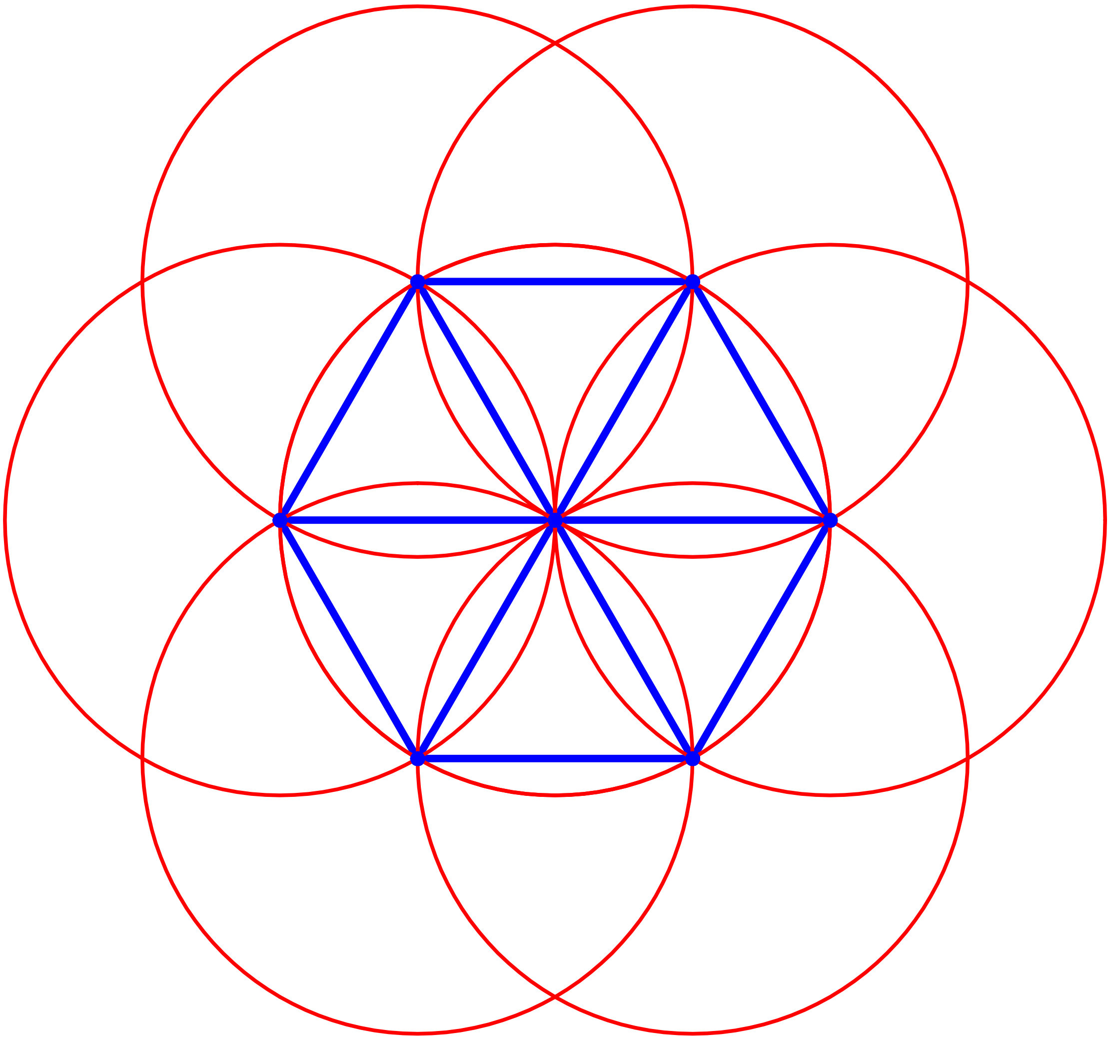
Dies im ebenen Bild. Im n-dimensionalen Raum entsprechen den Kreisen Hyperkugeln.

Das folgende Bild illustriert den Fall $n = 4$.



Vierdimensionaler Hyperwürfel mit 16 Kreisen

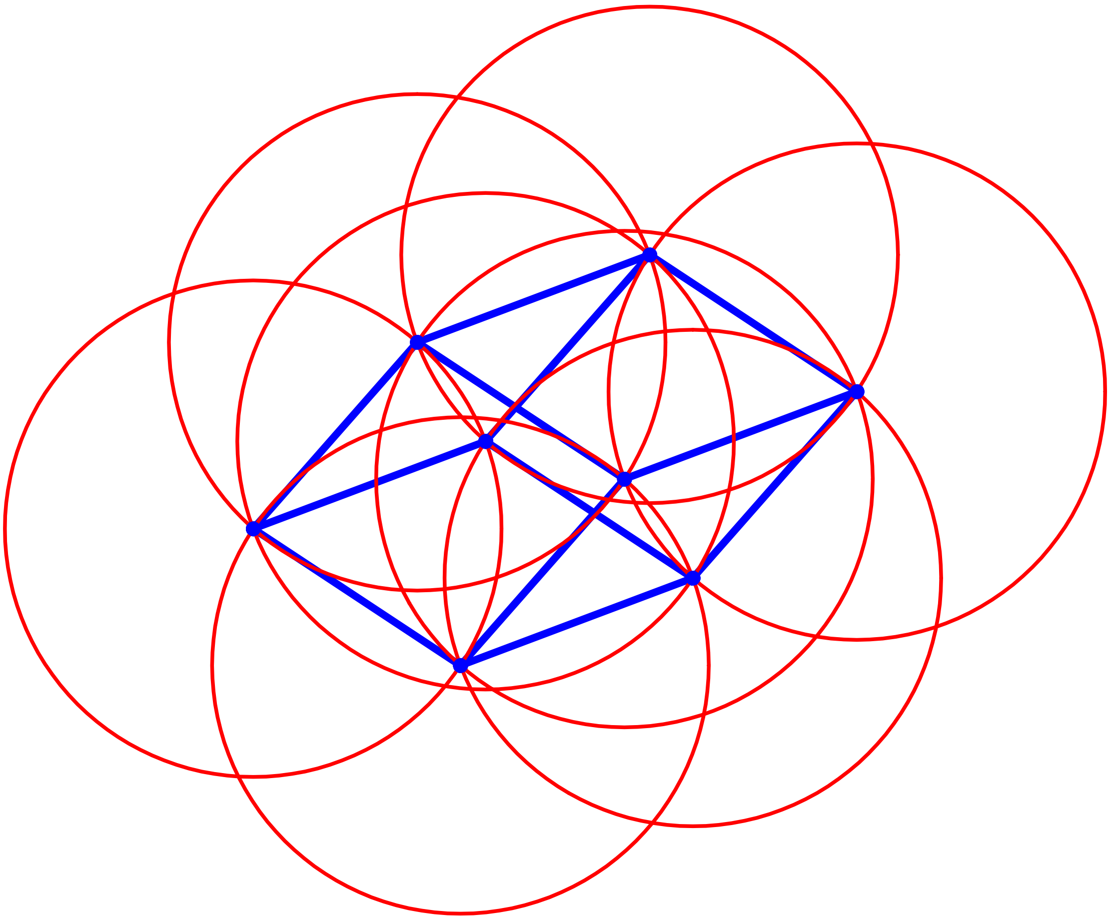
Bei $n = 3$ fallen in der isometrischen Darstellung zwei Würfelecken aufeinander. Daher die Doppelzählung des „zentralen“ Kreises.



Zwei Ecken fallen aufeinander

Dieser Effekt tritt auch bei anderen Dimensionen auf.

Wenn wir die Würfelecken weniger symmetrisch zeichnen, werden alle acht Kreise sichtbar. In dieser Situation sind die Winkel zwischen den projizierten Kanten nicht mehr regelmäßig.



Alle acht Kreise sichtbar

4 MuPAD-Programm

Exemplarisch das Programm für $n = 4$:

```
n:=4:
N:=2^n-1:

for k from 0 to N do
 x[k]:=0:
 y[k]:=0:
 for j from 1 to n do
  x[k]:=x[k]+round(frac(k*(1/2)^(n-j+1)))*cos(j*PI/n):
  y[k]:=y[k]+round(frac(k*(1/2)^(n-j+1)))*sin(j*PI/n):
 end_for:
end_for:

Kreis:=k->plot::Curve2d([x[k]+cos(t), y[k]+sin(t)], t=0..2*PI,
LineWidth=1/2, LineColor=[1,0,0]):

plot(Kreis(k)$k=0..N, Scaling=Constrained, Axes=None,
Width=150, Height=150):
```