Hans Walser, [201903009]

Kreisscharen

Idee und Anregung: H. M.-S., V.

1 Worum geht es?

Summen von Abstandsquadraten.
Verallgemeinerung von Thaleskreis und Pythagoras

2 Problemstellung

Wir arbeiten in der Ebene. Die Überlegungen spielen analog in höheren Dimensionen. Wir gehen aus von n Punkten $A_i\left(x_i, y_i\right), i \in \{1,...,n\}$, einer Konstante c und n Gewichten $g_i, i \in \{1,...,n\}, g_i \in \mathbb{R}$. Die Gewichte dürfen auch null oder negativ sein. Für die Summe der Gewichte verwenden wir die Schreibweise G:

$$G = \sum_{i=1}^{n} g_i \tag{1}$$

Wir suchen diejenigen Punkte $P\left(x_P, y_P\right)$, für welche gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \left(d\left(PA_i\right)\right)^2 = c \tag{2}$$

Es soll also die gewichtete Summe der Quadrate der Abstände der Konstanten entsprechen. Man beachte, dass c *nicht* die Rolle der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck spielt.

3 Bearbeitung

In einem kartesischen Koordinatensystem in der Ebene erhalten wir aus (2):

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \left(\left(x_P - x_i\right)^2 + \left(y_P - y_i\right)^2 \right) = c \tag{3}$$

Die Bedingung (3) kann umgeformt werden zu:

$$G\left(x_P^2 + y_P^2\right) - 2x_P \sum_{i=1}^{n} g_i x_i - 2y_P \sum_{i=1}^{n} g_i y_i + \sum_{i=1}^{n} g_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} g_i y_i^2 = c \tag{4}$$

Falls $G = 0$ ist, erhalten wir aus (4) eine lineare Gleichung. Die gesuchte Punktmenge ist eine Gerade.

Für $G \neq 0$ können wir (4) schreiben in der Form:

$$x_P^2 + y_P^2 - 2x_P \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i x_i}{G} - 2y_P \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i y_i}{G} + \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i x_i^2}{G} + \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i y_i^2}{G} = \frac{c}{G} \tag{5}$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises. Er hat den Mittelpunkt M:

$$M\left(x_M, y_M\right) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} g_i x_i}{G}, \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i y_i}{G} \right) \tag{6}$$

Der Mittelpunkt M ist also der gewichtete Schwerpunkt der Punkte A_i.

Wenn wir nun c variieren, erhalten wir eine konzentrische Kreisschar.

Diese Kreisschar besteht aus den Niveaulinien der durch die linke Seite von (3) gegebenen Funktion in $\left(x_P, y_P\right)$.

Für den Kreisradius r erhalten wir:

$$r^2 = \frac{1}{G^2}\left(Gc - G\sum_{i=1}^{n} g_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} g_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} g_i y_i\right)^2 \right) \tag{7}$$

Dies kann in der Form geschrieben werden:

$$r^2 = \frac{1}{G}c - \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n} g_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) + x_M^2 + y_M^2 \tag{8}$$

4 Beispiele

Die Quadratsumme der Abstände kann durch eine Flächensumme von Quadraten visualisiert werden.

4.1 Beispiel 1

Zwei Punkte mit gleichem Gewicht. Die Abbildung 1 zeigt die Kreisschar. Die Kreisschar ist nicht äquidistant. Es sind die Niveaulinien eines Rotationsparaboloides. Der Mittelpunkt der Kreisschar ist der Tiefpunkt des nach oben offenen Rotationsparaboloides.

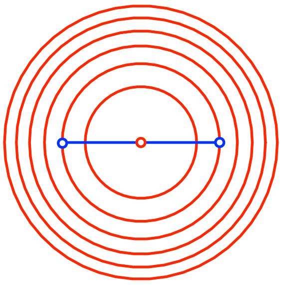

Abb. 1: Kreisschar

Die Kreisschar enthält als Sonderfall den Thaleskreis und damit den Satz des Pythagoras (Abb. 2).

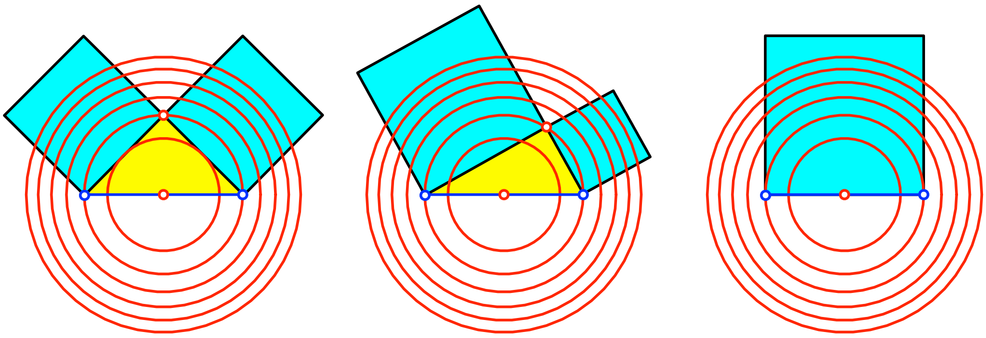

Abb. 2: Hellblaue Flächensummen invariant. Satz des Pythagoras

Die Abbildung 3 zeigt den allgemeinen Fall (Satz von Al-Sijzī). Wir haben keine rechtwinkligen Dreiecke mehr.

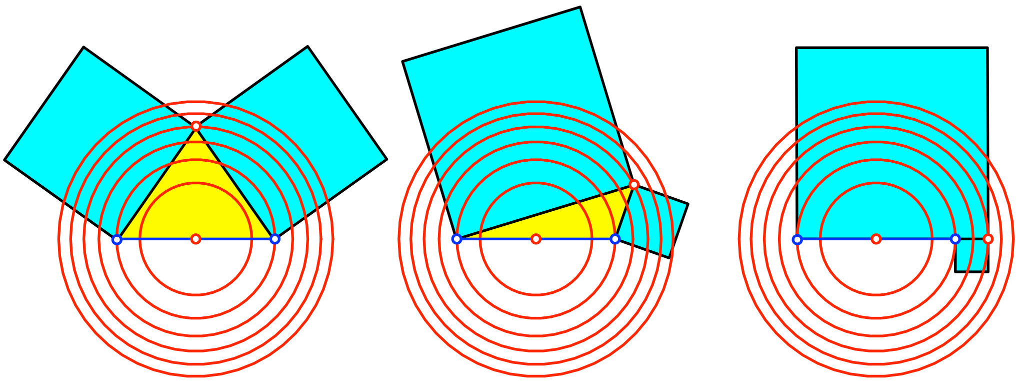

Abb. 3: Hellblaue Flächensummen invariant. Satz des Al-Sijzī

4.2 Zwei Punkte mit entgegengesetzt gleichem Gewicht

Die Gewichtsumme G ist null. Wir erhalten den Sonderfall von parallelen Geraden (Abb. 4). Die Geraden sind aus Symmetriegründen rechtwinklig zur Trägergeraden der beiden gegebenen Punkte.

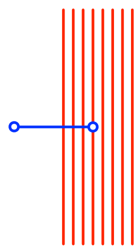

Abb. 4: Gewichtsumme null

Die eine Quadratfläche (grün in Abb. 5 und 6) müssen wir nun negativ rechnen.

Das Lot durch einen der beiden Punkte führt zum Sonderfall des Satzes des Pythagoras (Abb. 5).

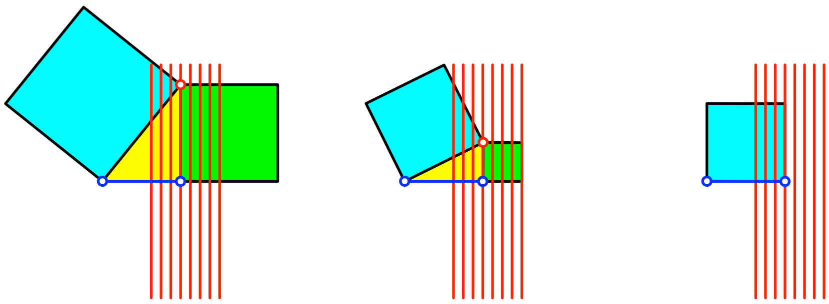

Abb. 5: Quadratflächendifferenzen invariant. Pythagoras

Die Abbildung 6 zeigt einen allgemeinen Fall (Al-Sijzī).

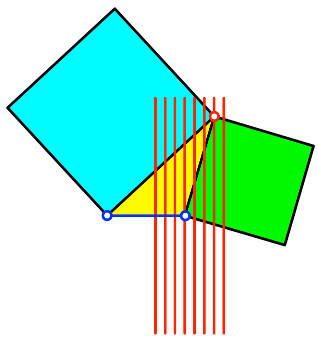

Abb. 6: Quadratflächendifferenzen invariant. Al-Sijzī

4.3 Zwei Punkte mit ungleichem Gewicht

Wir arbeiten mit den Gewichten 1 und 2. Die Abbildung 7 zeigt die Kreisschar. Das Zentrum drittelt die Strecke zwischen den beiden Punkten. Der Punkt rechts hat das doppelte Gewicht.

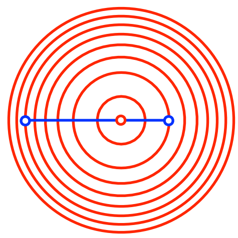

Abb. 7: Kreisschar

In der Abbildung 8 wird der Sonderfall des Kreises durch einen der beiden Punkte vorgestellt.

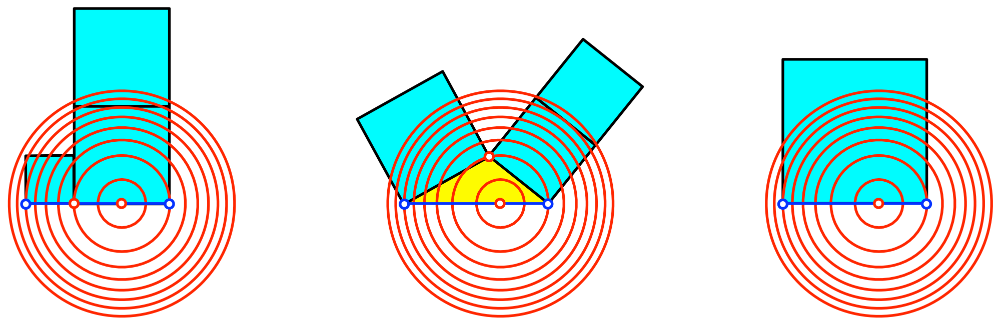

Abb. 8: Hellblaue Flächensummen invariant

Die Abbildung 9 zeigt den allgemeinen Fall.

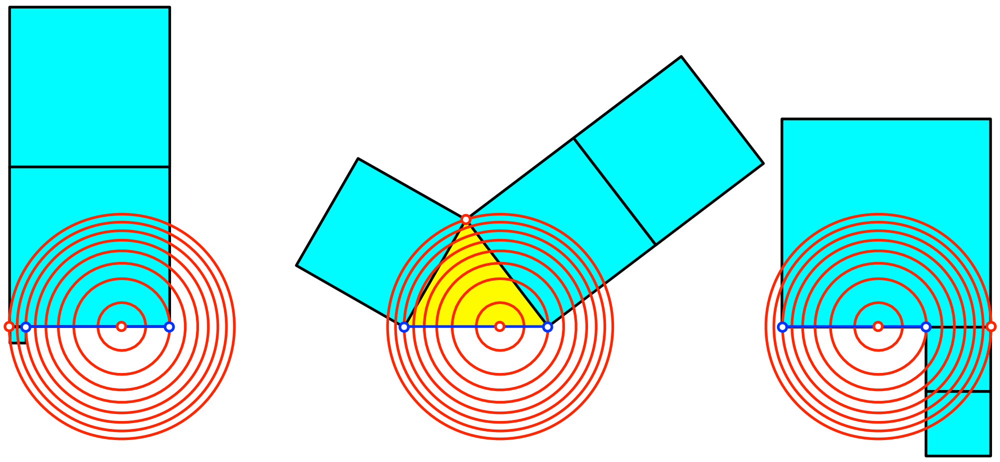

Abb. 9: Hellblaue Flächensummen invariant

4.4 Zwei Punkte mit Gewichtsverhältnis im Goldenen Schnitt

Die Sache funktioniert auch mit irrationalem Gewichtsverhältnis. Wir zeigen einen speziellen Fall. Die Strecke zwischen den beiden gegebenen Punkten teilen wir im Verhältnis des Goldenen Schnittes (Abb. 10) (über den Goldenen Schnitt siehe Walser 2013a) und zeichnen um den Teilpunkt den Kreis durch den näherliegenden Endpunkt.

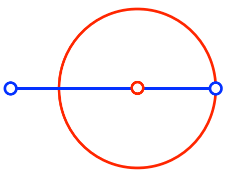

Abb. 10: Goldener Schnitt und Kreis

Die Abbildung 11 zeigt nun die invarianten Flächensummen. Die benötigten Rechtecke sind goldene Rechtecke.

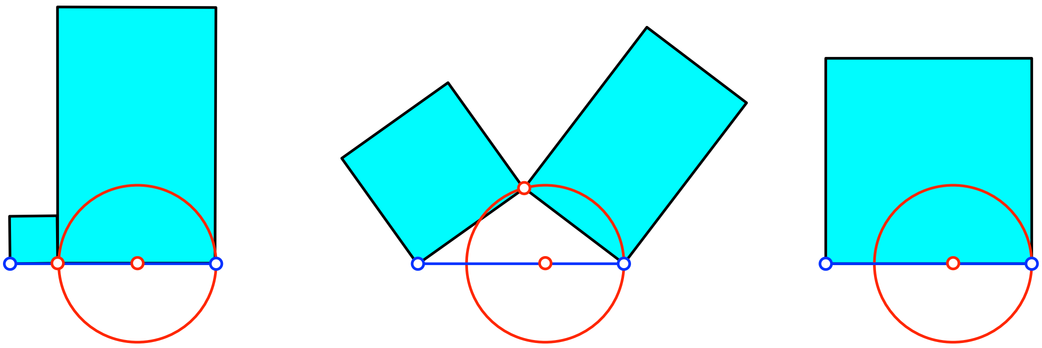

Abb. 11: Invariante Flächensummen

Neckische Frage: In welcher Position sind das Quadrat und das Goldene Rechteck flächengleich?

Dazu tragen wir ein Rechteck im DIN-Format ab (gelb in Abb. 12) und schlagen die kurze Seite hinauf. Über das DIN-Format siehe Walser 2013b.

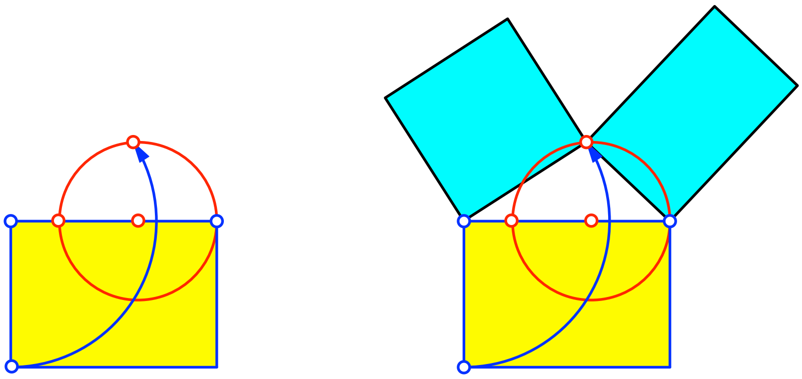

Abb. 12: DIN-Format und Flächengleichheit

4.5 Drei Punkte

Wir nehmen zunächst die drei Eckpunkte eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seitenlänge 2 (Abb. 13). Jedem Punkte geben wir das Gewicht 1.

Das Niveau $c = 5$ gibt den Inkreis, das Niveau $c = 8$ den Umkreis. Der Mittelpunkt des Dreieckes hat das Niveau $c = 4$. Für Niveaus $c < 4$ gibt es keine reellen Kreise.

Für einen allgemeinen Punkt auf dem Niveau $c = 9$ sind die drei Quadrate eingezeichnet, deren Flächensumme für alle Punkte auf diesem Niveau invariant ist.

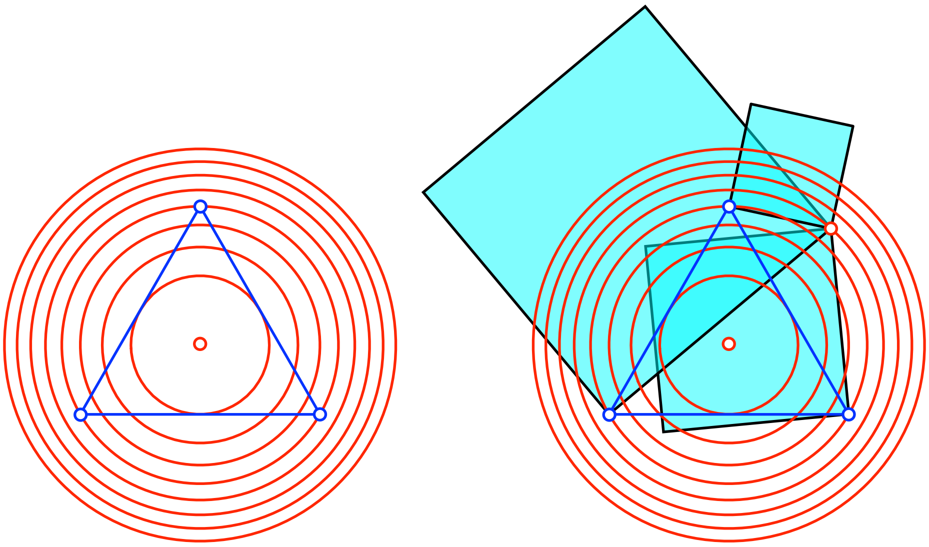

Abb. 13: Gleichseitiges Dreieck

Nun verändern wir die Gewichte. Dem Punkt an der Spitze geben wir neu das Gewicht –1. Wir erhalten die Niveaulinien der Abbildung 14.

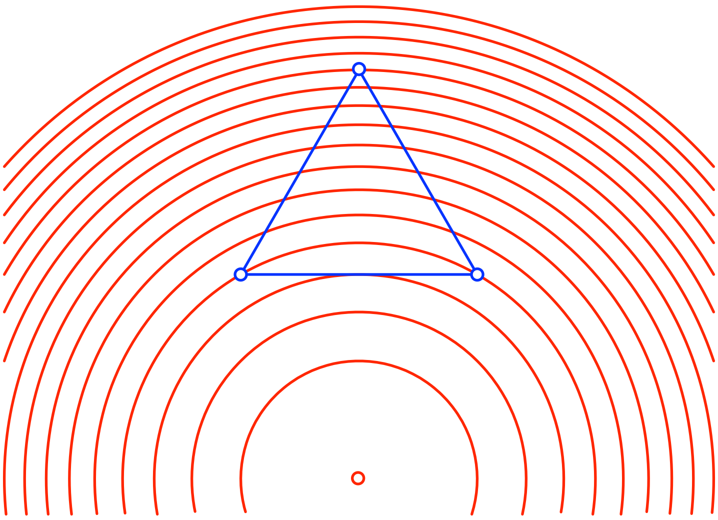

Abb. 14: Die Spitze hat das Gewicht –1

Das Zentrum der Kreise ist nun die Niveaulinie für $c = -4$. Der Ankreis unter dem Dreieck hat das Niveau $c = -1$. Der Kreis durch die beiden Basispunkt hat das Niveau $c = 0$. Der Kreis durch die Spitze hat das Niveau $c = 8$.

Die Abbildung 15 gibt ein Beispiel mit drei Quadraten (Ausgangspunkt auf dem Niveau $c = 3$). Das grün gezeichnete Quadrat kommt negativ in die Buchhaltung.

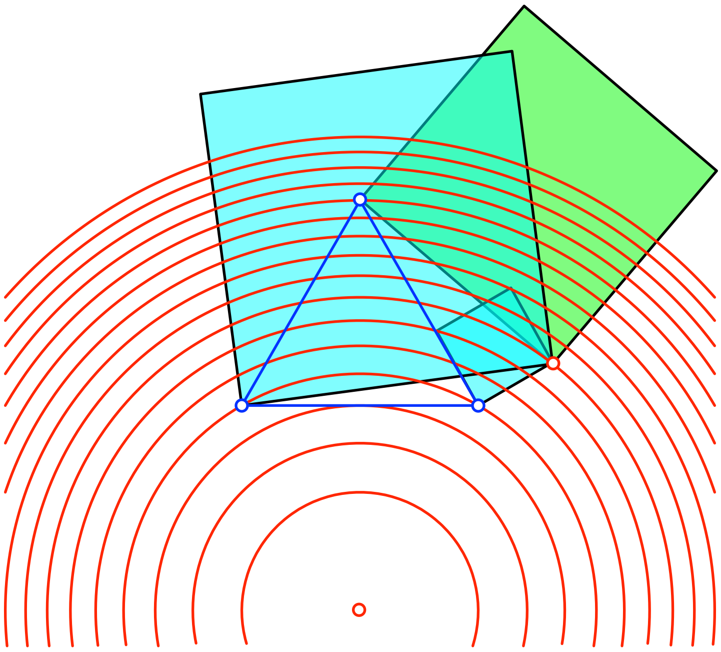

Abb. 15: Beispiel

Nun geben wir noch einen drauf. Der Spitze geben wir das Gewicht –2. Damit wird die Gewichtssumme $G = 0$. Wir erhalten eine Parallelenschar als Niveaulinien (Abb. 16).

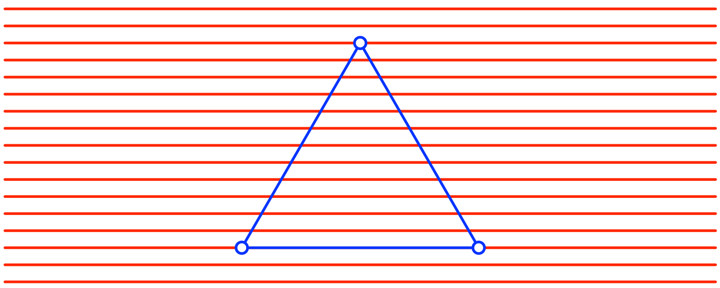

Abb. 16: Niveaulinien eine Parallelenschar

Die Grundlinie hat das Niveau $c = -4$. Der Schwerpunkt des Dreieckes ist auf dem Nivea $c = 0$. Die Spitze ist auf dem Niveau $c = 8$.

In der Abbildung 17 sind für einen Punkt auf der Niveaulinie $c = 0$ (durch den Schwerpunkt) due zugehörigen Quadrate eingezeichnet. Das grüne Doppelquadrat kommt negativ in die Buchhaltung. Da wir den Punkt auf dem Niveau $c = 0$ gewählt haben, heißt das, dass die beiden blauen Quadrate flächengleich sind zum grünen Doppelquadrat.

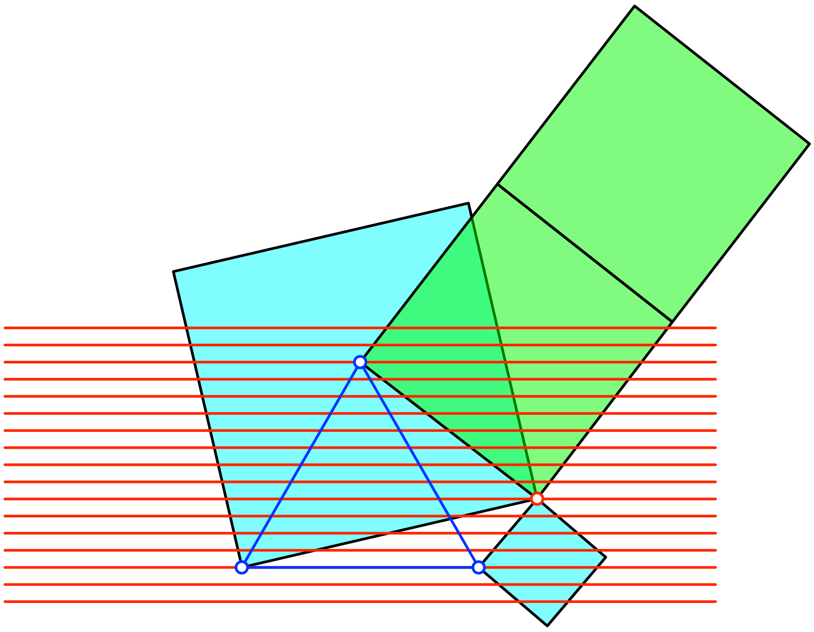

Abb. 17: Blau = grün

4.6 Drei beliebige Punkte

Die Abbildung 18 zeigt die Situation mit drei beliebigen Punkten, aber alle mit dem Gewicht 1.

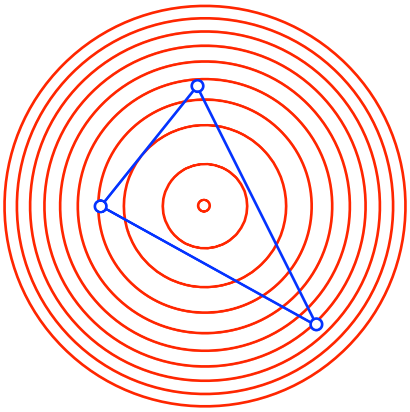

Abb. 18: Allgemeines Dreieck

Der Mittelpunkt der Kreisschar ist der Schwerpunkt des Dreiecks. Wenn wir die Kreise als Niveaulinien sehen, haben wir ein Rotationsparaboloid mit dem Tiefpunkt im Schwerpunkt des Dreiecks. Das ist ein alter Hut aus der Statistik: die Abweichungsquadratsumme nimmt im Schwerpunkt (arithmetisches Mittel) das Minimum an.

4.7 Eckpunkte eines Quadrates

Wir nehmen die vier Eckpunkte eines Quadrates je mit dem Gewicht 1 (Abb. 19).

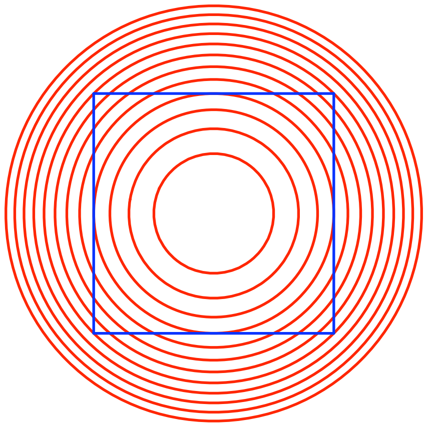

Abb. 19: Quadrat?

Die Kreisschar haben wir erwartet. Sie führt zu einer optischen Täuschung, indem es so aussieht, als ob die Quadratseiten in der Mitte etwas eingedrückt wären und die Ecken leicht spitzwinklig.

Nun ändern wir die Gewichte in 1, 1, –1, –1. Wir haben jetzt das Gesamtgewicht $G = 0$ und erwarten eine Parallelenschar (Abb. 20).

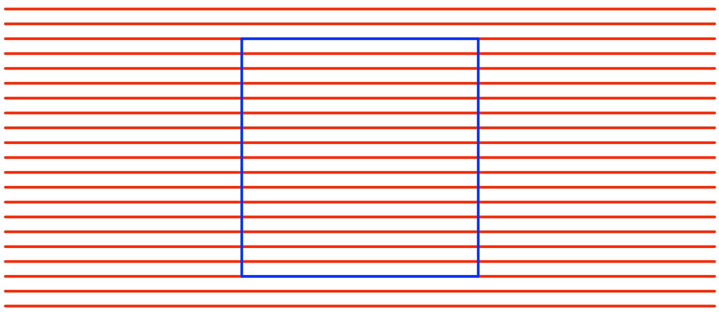

Abb. 20: Parallelenschar

Wir ändern die Gewischt erneut ab in die alternierende Form 1, –1, 1, –1 und fragen ausschließlich nach dem Nullniveau. Dann wird der ganze Bildschirm rot (Abb. 21).

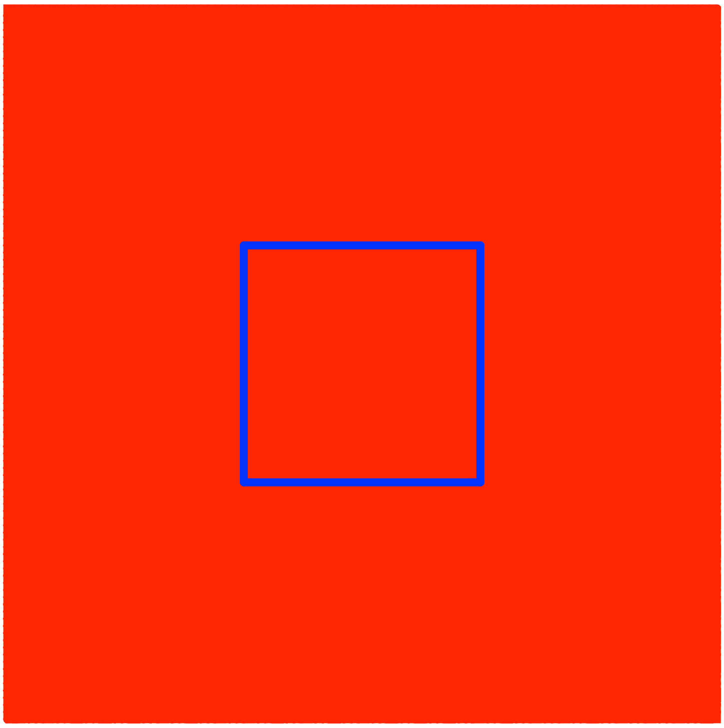

Abb. 21: Nullniveau bei alternierenden Gewichten

Wir haben einen mir bisher unbekannten Sachverhalt gefunden: die alternierende Summe der Quadrate der Abstände von einem beliebigen Punkt zu den Ecken eines Quadrates ist null. Die Abbildung 22 illustriert den Sachverhalt. Dieser Sachverhalt kann direkt mit Pythagoras nachgewiesen werden.

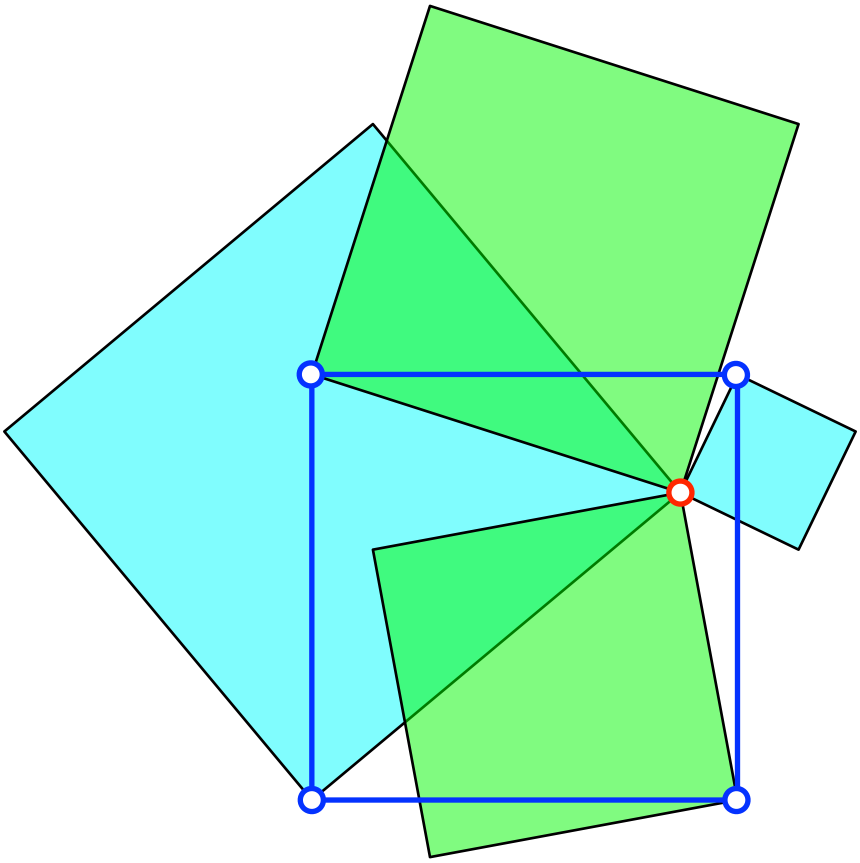

Abb. 22: Blau = grün

Literatur

Walser, Hans (2013a): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, Hans (2013b): *DIN A4 in Raum und Zeit*. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-69-1.

Weblinks

Hans Walser: Optische Täuschung
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/O/Opt_Taeuschung/Opt_Taeuschung.htm