

Hans Walser, [20190812]

Kreisspiegelung

Anregung: Borges 2019

1 Worum geht es?

Beispiele von Zugmodus-resistenten Konstruktionen der Kreisspiegelung.

2 Kreisspiegelung

Bei einer Kreisspiegelung oder Kreisinverson eines Punktes P an einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r (Abb. 1) gilt:

$$|OP'| \cdot |OP| = r^2 \quad (1)$$

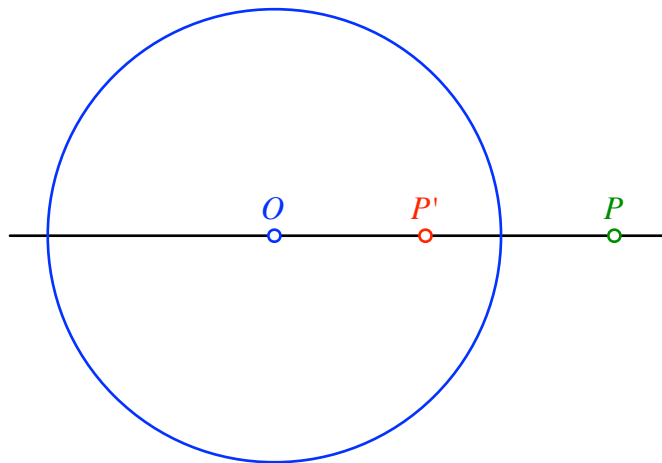


Abb. 1: Kreisspiegelung

Für die folgenden Überlegungen normieren wir bei Bedarf wie folgt: $r = 1$, O sei der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems (der Inversionskreis ist also der Einheitskreis), der Urbildpunkt P liegt auf der positiven x -Achse. In diesem Koordinatensystem haben wir $P = (p, 0)$ und $P' = (p', 0)$. Aus (1) wird:

$$pp' = 1 \quad (2)$$

Bei den folgenden Konstruktionen müssen wir jeweils (2) nachweisen.

Lehrer Lämpel: Die Formeln (1) und (2) sind symmetrisch bezüglich Urbildpunkt und Bildpunkt. Die Kreisspiegelung geht hin und zurück nach demselben Muster.

3 Klassische Konstruktionen

Die in der Schule tradierten klassischen Konstruktionen unterscheiden je nachdem, ob von außen nach innen oder von innen nach außen gespiegelt wird.

3.1 Von außen nach innen

Tangenten von P an den Inversionskreis. Gerade durch die Berührungspunkte mit der Geraden OP schneiden, gibt Bildpunkt P' (Abb. 2).

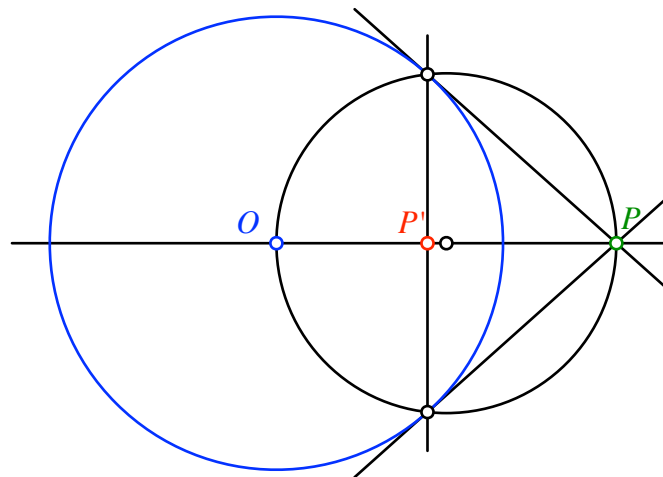


Abb. 2: Von außen nach innen

Die Stimmigkeit der Konstruktion ergibt sich mit dem Kathetensatz im in der Abbildung 3 gelb eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck (richtig: der Kathetensatz, einer der Sätze, wo Sie sich gefragt haben, wozu sie gut sind).

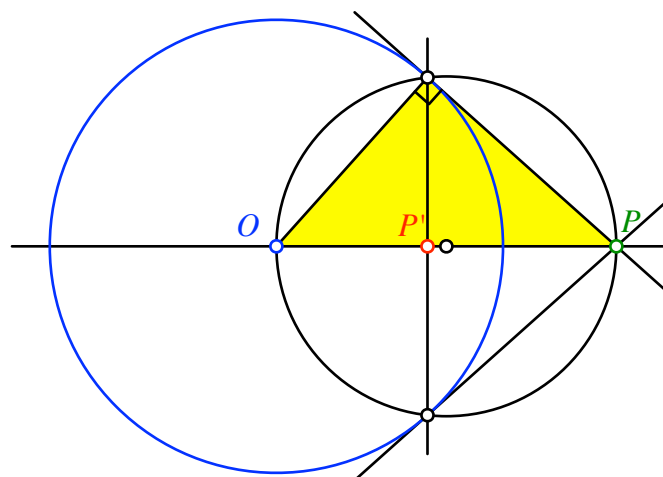


Abb. 3: Beweis mit Kathetensatz

Lehrer Lämpel: Asymmetrische Behandlung von P und P' . Ganze Hypotenuse zu Hypotenusenabschnitt.

3.2 Von innen nach außen

Lot in P auf die Gerade OP mit Inversionskreis schneiden. Tangenten in diesen Punkten. Schnittpunkt der Tangenten ist P' (Abb. 4).

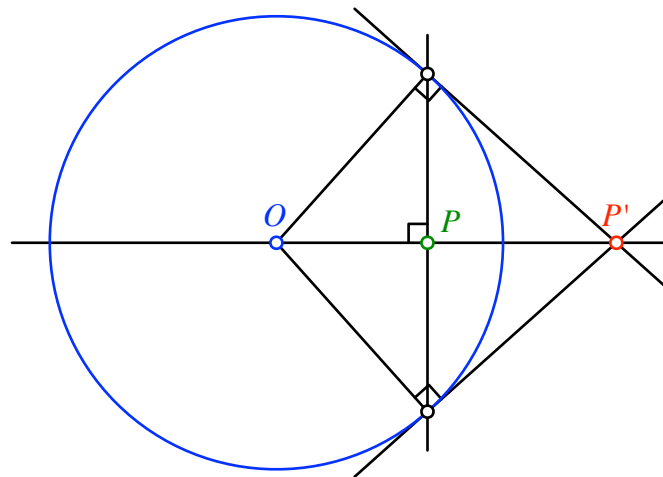


Abb. 4: Von innen nach außen

Nachweis ebenfalls mit Kathetensatz wie bei Abbildung 3.

4 Diskussion

Die beiden oben beschriebenen Konstruktionsverfahren sind nicht Zugmodus-resistent. Gesucht sind Verfahren, die unabhängig von der Lage des Urbildpunktes P funktionieren. Im Folgenden einige Beispiele solcher Verfahren. Ich habe sie experimentell geprüft.

5 Stereografische Projektion

Man soll sich durch den hochgestochenen Titel nicht irritieren lassen. Die Sache ist ganz einfach und die Konstruktion elegant (Abb. 5).

Die Punkte N und S sind die Schnittpunkte des Lotes in O auf OP mit dem Inversionskreis. Wir schneiden die Gerade PN mit dem Inversionskreis. Die Verbindung von S mit diesem Punkt schneiden wir mit der Geraden OP . Der Schnittpunkt ist P' .

Dieses Verfahren funktioniert unabhängig von der Lage von P . Es ist also geeignet, um ein Makro für die Kreisspiegelung zu bauen.

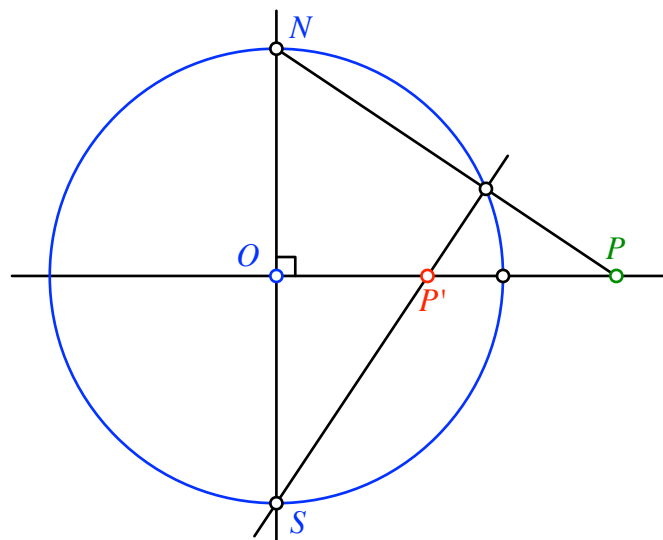


Abb. 5: Stereografische Projektion

Die Stimmigkeit dieser Konstruktion ergibt sich aus der Ähnlichkeit der beiden in der Abbildung 6 eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecke.

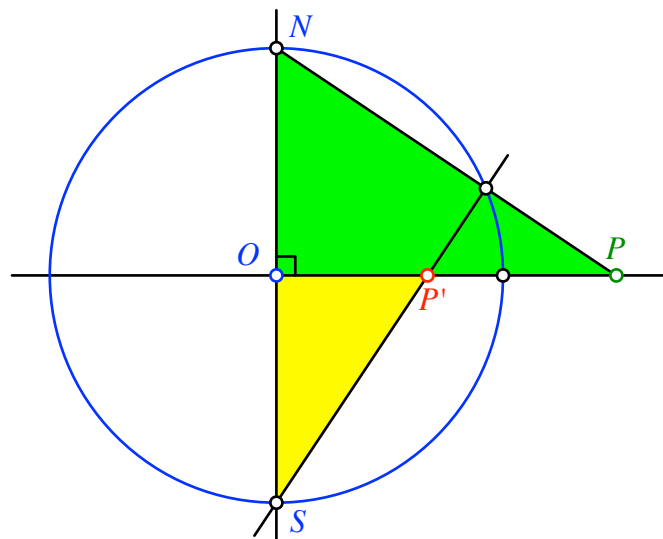


Abb. 6: Beweis mit ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken

Die Bezeichnung *stereografische Projektion* ist in der Kartografie geläufig. Wir denken uns den Inversionskreis ersetzt durch die Erdkugel und die Gerade OP durch die Äquatorebene. Die stereografische Projektion ist nun die Zentralprojektion von einem der beiden Pole aus auf die Äquatorebene. Die stereografische Projektion ist winkeltreu

(conformal) und Möbiuskreis-treu. Unter Möbiuskreisen fasst man „echte“ Kreise und Geraden zusammen, indem man letztere als Kreis mit der Krümmung null interpretiert. Die Kreisspiegelung kann also mit einem Trick über den Raum gemacht werden. Wir projizieren die Äquatorebene vom Nordpol aus auf die Kugel und das Kugelbild vom Südpol aus wieder auf die Äquatorebene. Das entspricht insgesamt einer Kreisspiegelung der Äquatorebene am Äquatorkreis.

6 Höhensatz

Das Lot in N auf die Gerade PN schneiden wir mit der Geraden OP . Den Schnittpunkt Q spiegeln wir an O und erhalten so P' (Abb. 7).

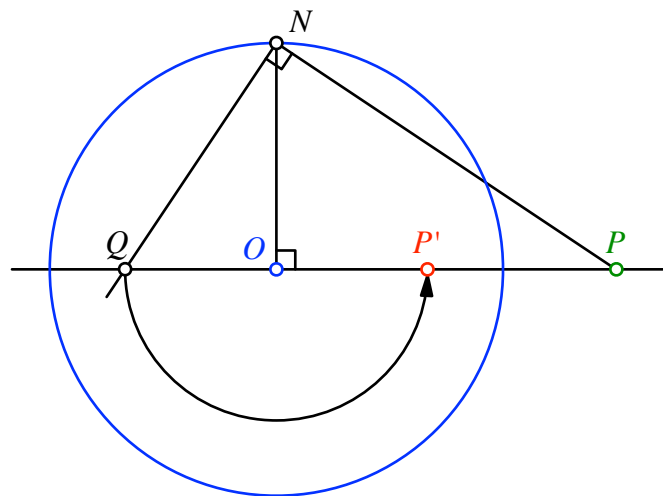


Abb. 7: Lot und Spiegeln

Die Stimmigkeit der Konstruktion ergibt sich aus dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck (Abb. 8).

Den beiden gleichberechtigten Hypotenusenabschnitten entsprechen die Punkte P beziehungsweise P' . Der Lehrer Lämpel kann also zufrieden sein.

Das Verfahren funktioniert unabhängig von der Lage von P . Es ist also geeignet, um ein Makro für die Kreisspiegelung zu bauen.

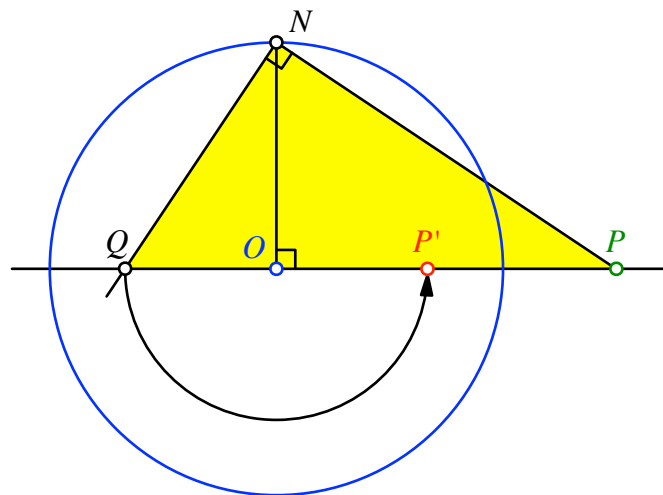


Abb. 8: Höhensatz

7 Gnomon

Das Verfahren ist etwas akademisch. Es ist einfach der geometrische Nachvollzug der Formeln (1) und (2).

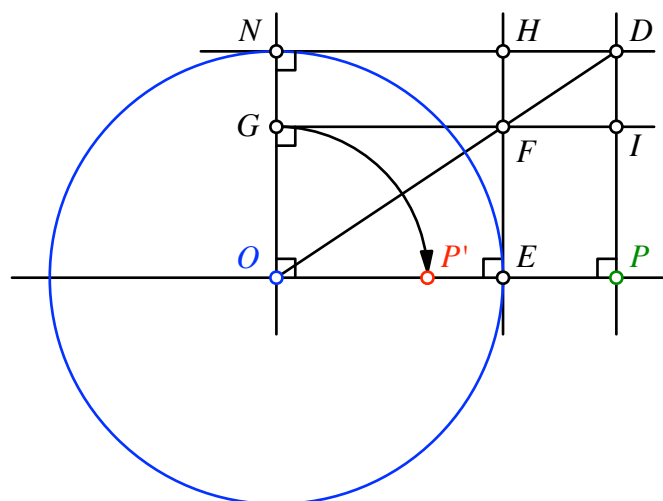


Abb. 9: Wie die alten Griechen rechneten

Wir zeichnen zunächst durch N eine Parallele zu OP (Abb. 9). Das Lot in P zu OP schneiden wir mit dieser Parallelen in D . Die Gerade OD schneiden wir mit dem Lot in E zu OP . Durch den Schnittpunkt F zeichnen wir eine Parallele zu OP und schneiden diese mit der Geraden ON . Den Kreis um O durch den Schnittpunkt G schneiden wir mit OP und erhalten so den Bildpunkt P' .

Das Verfahren funktioniert unabhängig von der Lage von P . Es ist also geeignet, um ein Makro für die Kreisspiegelung zu bauen.

Die Stimmigkeit der Konstruktion ergibt sich aus der Flächengleichheit des Einheitsquadrates $OEHN$ und des Rechteckes $OPIG$ (Gnomon-Verfahren, Abb. 10).

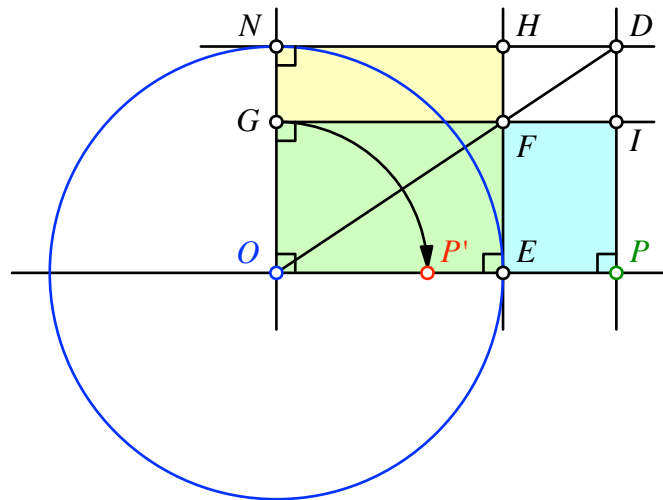


Abb. 10: Flächengleichheit

Literatur

Borges, Florian 2019: Großes Sparpotenzial in der Mathematik wiederentdeckt: Geometrie mit dem Zirkel und *ohne* Lineal. MNU Journal – Ausgabe 04.2019 – ISSN 0025-5866.

Websites

Hans Walser: Kreisspiegelung

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreisspiegelung2/Kreisspiegelung2.htm>

Hans Walser: Kreisspiegelung

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreisspiegelung3/Kreisspiegelung3.htm>