Hans Walser, [20190401]

Kreuze

„Es is halt a Kreiz! A Kreiz is'! O mei!“
(Thomas Mann, *Buddenbrooks*)

1 Worum geht es?

Ein beliebtes schulisches Tummelfeld für die Beweistechnik der vollständigen Induktion sind Abzählprobleme mit arithmetischen Folgen. Dazu ein Aprilscherz.

2 Kreuze

Die Abbildung 1 zeigt aus Kreisen aufgebaute Kreuze.

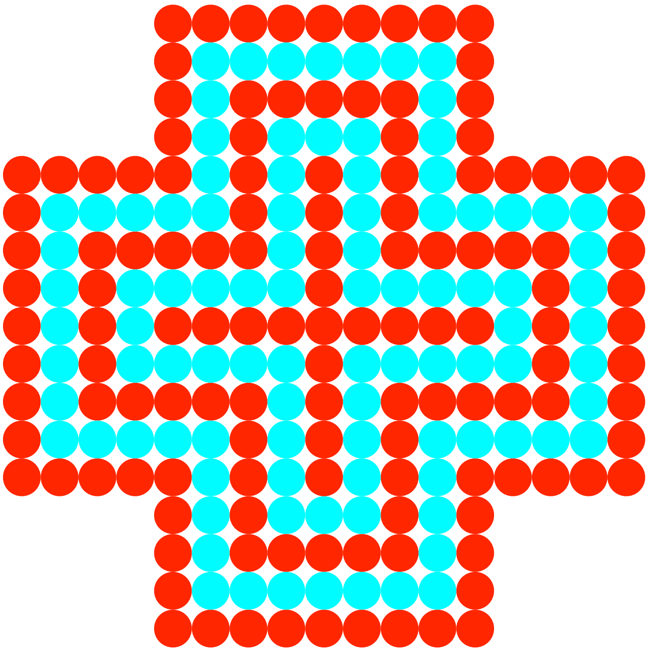

Abb. 1: Kreuze

Das äußerste Kreuz besteht aus 64 rotem Kreisen (nachzählen!). Es ist von innen nach außen gezählt das fünfte Kreuz.

3 Induktionsschritt

Die Abbildung 2 illustriert den Schritt von innen nach außen.

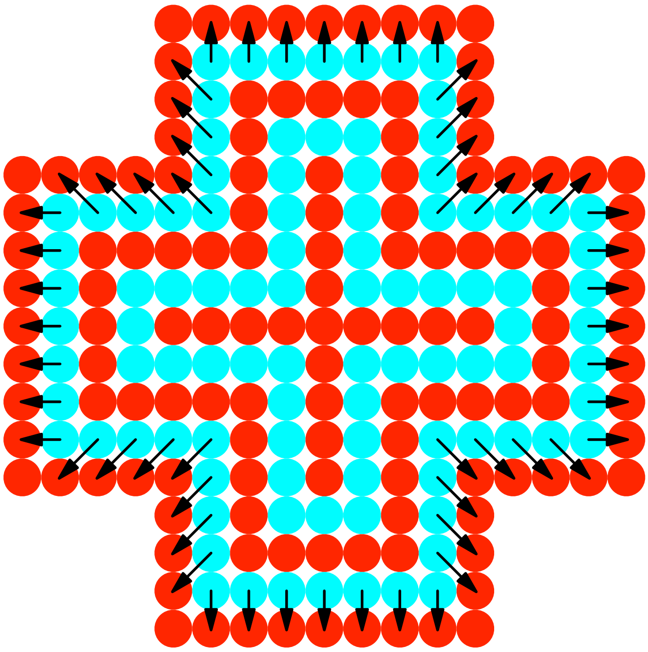

Abb. 2: Von innen nach außen

Wir sehen, dass an den acht Außenecken je ein zusätzlicher Kreis benötigt wird. Für die Anzahl a_n der Kreise im *n*-ten Kreuz haben wir also einen Zuwachs von acht:

$$a_n = a_{n-1} + 8 \tag{1}$$

Die Abbildung 3 zeigt den umgekehrten Schritt von außen nach innen.

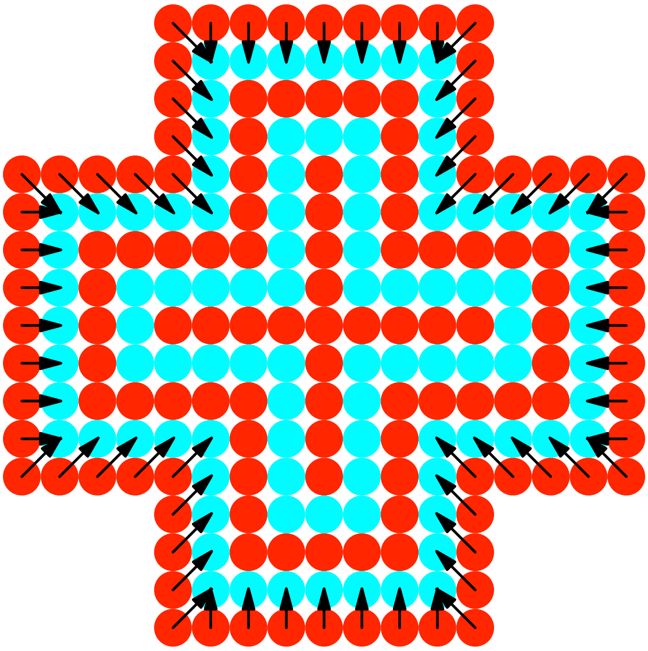

Abb. 3: Von außen nach innen

Wir haben acht doppelt belegte Kreise in den Ecken, müssen also um acht reduzieren:

$$a_{n-1} = a_n - 8 \tag{2}$$

Die Formel (2) ist natürlich mit der Formel (1) identisch. Der Induktionsschritt funktioniert in beiden Richtungen.

4 Die arithmetische Folge

Aus (1) ergibt sich, dass wir es mit einer arithmetischen Folge mit dem Zuwachs acht zu tun haben. Diese hat die explizite Form:

$$a_n = a_0 + 8n \tag{3}$$

Für $n = 5$ haben wir schon $a_5 = 64$ ausgezählt. Damit erhalten wir aus (3):

$$64 = a_0 + 8 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 24 \tag{4}$$

Unsere arithmetische Folge hat also die explizite Darstellung:

$$a_n = 24 + 8n \tag{5}$$

5 Wo steckt der Fehler?

Die Tabelle 1 gibt einige berechnete Werte (zweite Zeile). Diese werden mit den tatsächlichen Werten (dritte Zeile) verglichen.

n	1	2	3	4	5
a_n berechnet	32	40	48	56	64
a_n tatsächlich	17	40	48	56	64

Tab. 1: Berechnete und tatsächlich Werte

Wir sehen eine Abweichung bei $n = 1$. Wo steckt der Fehler?