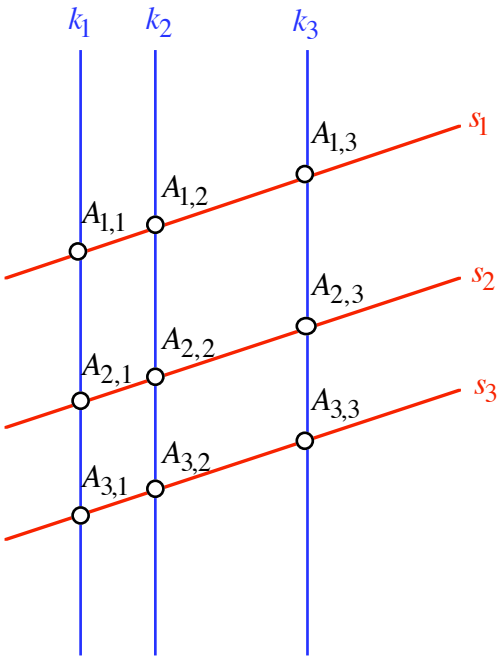
Hans Walser, [20091129a]

Krummer Strahlensatz

1 Erinnerung an die Schule

1.1 Schuss und Kette



Schnitt zweier Parallelenscharen

Mit $\overline{PQ}$ verstehen wir die Länge der Strecke PQ. Es gilt:

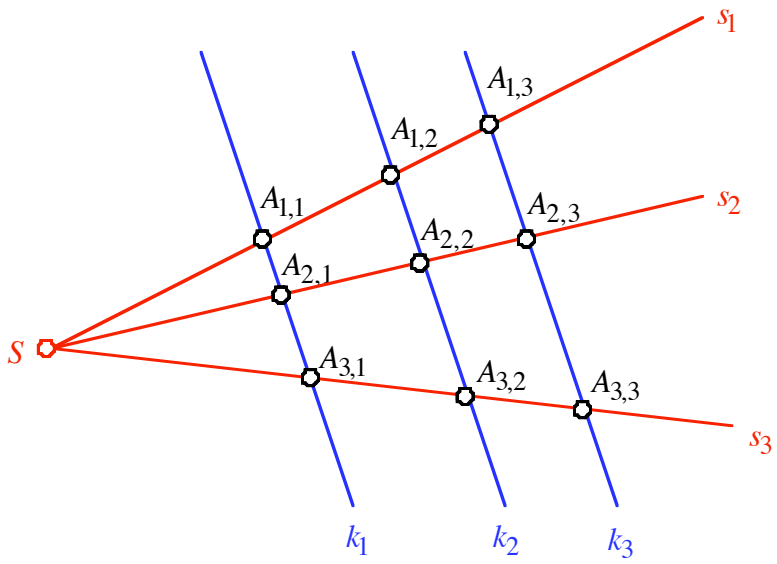
$$\frac{\overline{A_{1,1}A_{1,2}}}{\overline{A_{1,2}A_{1,3}}} = \frac{\overline{A_{2,1}A_{2,2}}}{\overline{A_{2,2}A_{2,3}}} = \frac{\overline{A_{3,1}A_{3,2}}}{\overline{A_{3,2}A_{3,3}}}$$

Ebenso ist:

$$\frac{\overline{A_{1,1}A_{2,1}}}{\overline{A_{2,1}A_{3,1}}} = \frac{\overline{A_{1,2}A_{2,2}}}{\overline{A_{2,2}A_{3,2}}} = \frac{\overline{A_{1,3}A_{2,3}}}{\overline{A_{2,3}A_{3,3}}}$$

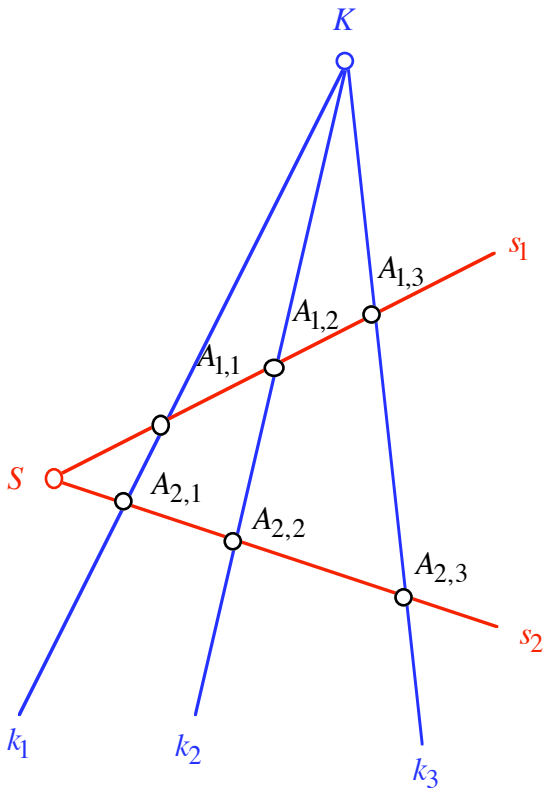
1.2 Büschel

Die angegebenen Verhältnisgleichungen gelten auch, wenn die Parallelschar $\{s_i\}$ durch ein Geradenbüschel $\{s_i\}$ ersetzt wird. Dies ist der klassische Strahlensatz.



Strahlensatz

Die Verhältnisgleichungen stimmen allerdings nicht mehr, wenn wir beide Geradenscharen büscheln.



Gegenbeispiel

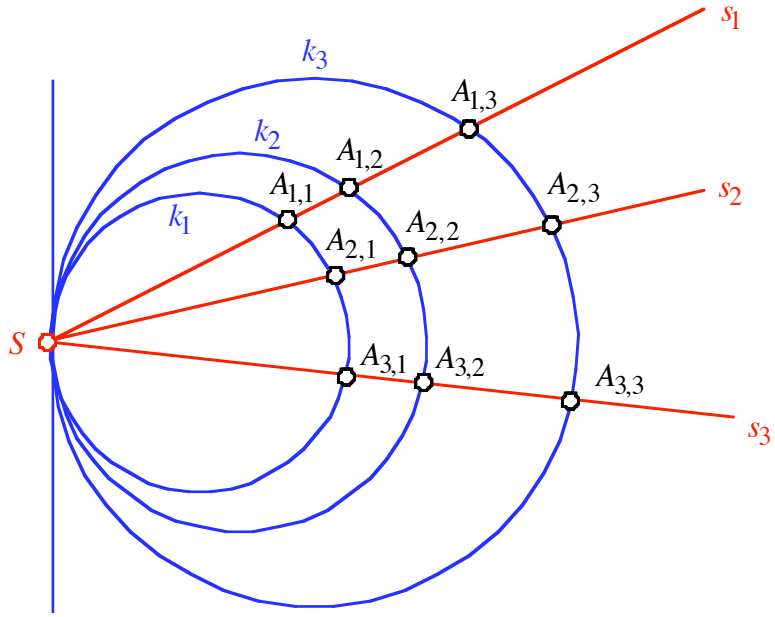
Während $A_{1,2}$ der Mittelpunkt der Strecke $A_{1,1}A_{1,3}$ ist, gilt entsprechendes offensichtlich nicht für die Situation auf der Geraden s_2. — Man müsste in dieser Situation mit so genannten *Doppelverhältnissen* arbeiten, um Invarianten zu finden. Das ist aber nicht Thema dieser Studie.

Wir fragen vielmehr, was geschieht, wenn wir die Geraden $\{k_j\}$ durch Kreise ersetzen.

2 Kreisbüschel

2.1 Gemeinsame Tangente

Die Kreise $\{k_j\}$ haben in S eine gemeinsame Tangente.



Kreise mit gemeinsamer Tangente

Mit Streckungen von S aus kann bewiesen werden:

$$\frac{\overline{A_{1,1}A_{1,2}}}{\overline{A_{1,2}A_{1,3}}} = \frac{\overline{A_{2,1}A_{2,2}}}{\overline{A_{2,2}A_{2,3}}} = \frac{\overline{A_{3,1}A_{3,2}}}{\overline{A_{3,2}A_{3,3}}}$$

$$\frac{\overline{A_{1,1}A_{2,1}}}{\overline{A_{2,1}A_{3,1}}} = \frac{\overline{A_{1,2}A_{2,2}}}{\overline{A_{2,2}A_{3,2}}} = \frac{\overline{A_{1,3}A_{2,3}}}{\overline{A_{2,3}A_{3,3}}}$$

Ebenso gilt, wobei $\overset{\frown}{PQ}$ die Länge des Bogens PQ bedeutet:

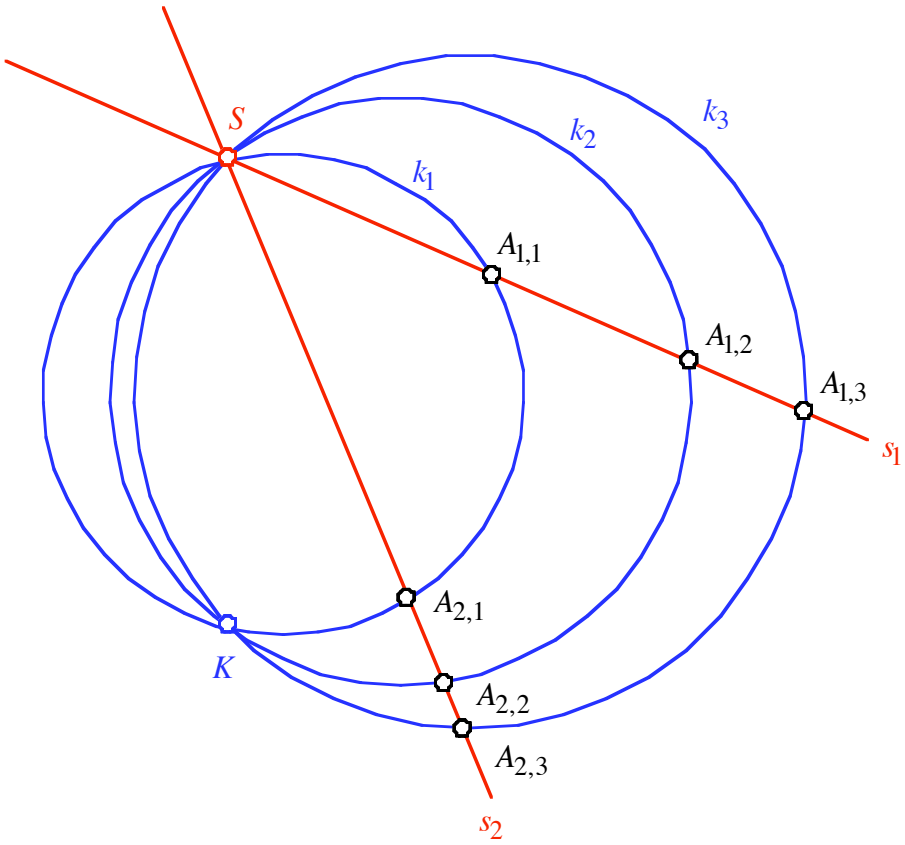
$$\frac{\overset{\frown}{A_{1,1}A_{2,1}}}{\overset{\frown}{A_{2,1}A_{3,1}}} = \frac{\overset{\frown}{A_{1,2}A_{2,2}}}{\overset{\frown}{A_{2,2}A_{3,2}}} = \frac{\overset{\frown}{A_{1,3}A_{2,3}}}{\overset{\frown}{A_{2,3}A_{3,3}}}$$

Bis jetzt hatten wir kaum Neues gegenüber dem klassischen Strahlensatz. Nun wird es aber anders.

2.2 Kreisbüschel durch zwei Punkte

Wir arbeiten mit einem Kreisbüschel durch zwei Punkte K und S.

2.2.1 Drei Kreise und zwei Geraden

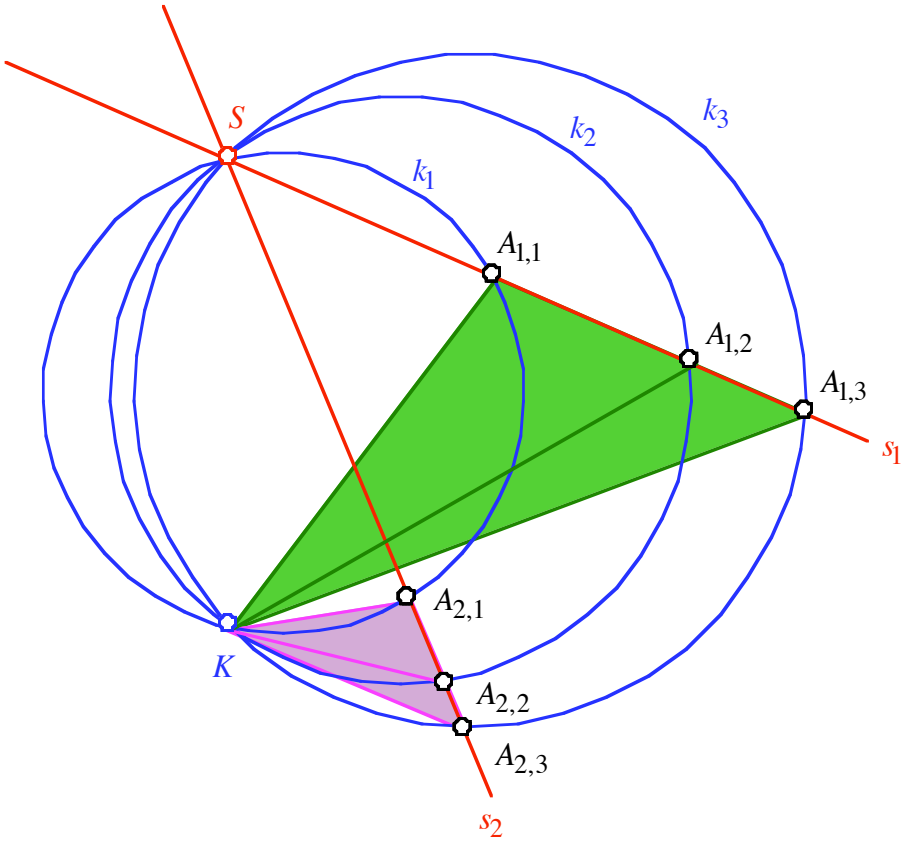


Kreisbüschel

In der Situation gemäß Figur ist:

$$\frac{\overline{A_{1,1}A_{1,2}}}{\overline{A_{1,2}A_{1,3}}} = \frac{\overline{A_{2,1}A_{2,2}}}{\overline{A_{2,2}A_{2,3}}}$$

Für den Beweis verwenden wir die grüne und die magenta Konfiguration der Beweisfigur.

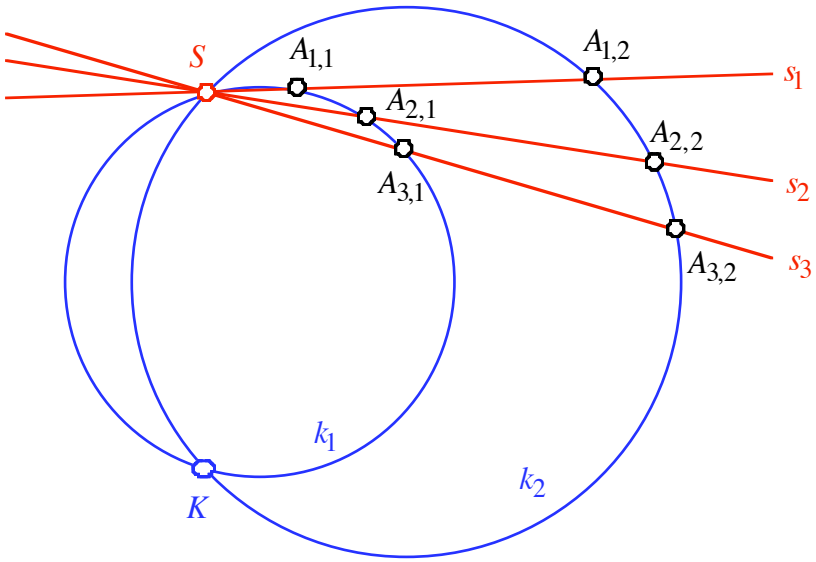


Beweisfigur

Auf Grund von Peripheriewinkelsätzen sind diese beiden Konfigurationen ähnlich. Daraus folgt die Behauptung.

2.2.2 Zwei Kreise und drei Geraden

Situation gemäß Figur.



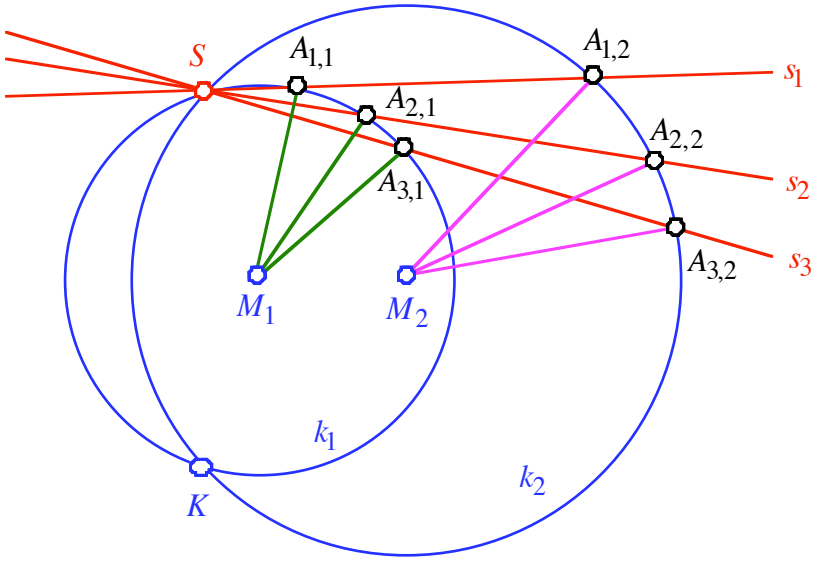
Zwei Kreise und drei Geraden

In dieser Situation ist:

$$\frac{\overline{A_{1,1}A_{2,1}}}{\overline{A_{2,1}A_{3,1}}} = \frac{\overline{A_{1,2}A_{2,2}}}{\overline{A_{2,2}A_{3,2}}}$$

$$\frac{\overset{\frown}{A_{1,1}A_{2,1}}}{\overset{\frown}{A_{2,1}A_{3,1}}} = \frac{\overset{\frown}{A_{1,2}A_{2,2}}}{\overset{\frown}{A_{2,2}A_{3,2}}}$$

Im Beweis arbeiten wir mit dem grünen und dem magenta Fächer mit den Zentren der Kreise k_1 und k_2.



Beweisfigur

Wegen Peripheriewinkelsätzen haben diese Fächer zwischen den Speichen doppelt so große Zwischenwinkel wie die drei Geraden s_1, s_2 und s_3. Die beiden Fächer sind also ähnlich. Daraus folgt die Behauptung.