Hans Walser, [20101114a]

Der Satz von Lehmann-Rosenbaum

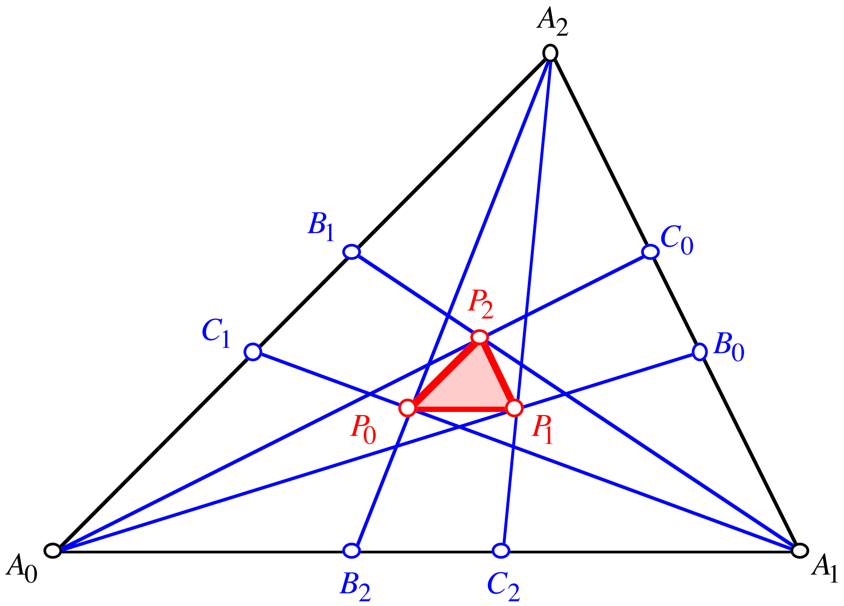
Anregung: I. L., B.

1 Worum geht es?

Zu gegebenem $\lambda \in (0,1)$ unterteilen wir die Seiten eines Dreiecks $A_0A_1A_2$ mit den Teilpunkten B_i und C_i:

$$\overrightarrow{A_iB_{1+2}} = \lambda \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$$
$$\overrightarrow{A_iC_{1+2}} = (1-\lambda)\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$$

Weiter sei P_i der Schnittpunkt der beiden Ecktransversalen $A_{i-1}B_{i-1}$ und $A_{i+1}C_{i+1}$. Die Abbildung zeigt die Situation für $\lambda = 0.4$. Schließlich sei S der Schwerpunkt des Dreiecks $A_0A_1A_2$.



Situation

Dann gilt der Satz von Lehmann-Rosenbaum: Die zentrische Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor $f(\lambda) = \frac{1-2\lambda}{1+\lambda}$ bildet das Dreieck $A_0A_1A_2$ auf das Dreieck $P_0P_1P_2$ ab:

$$Z_{S,\frac{1-2\lambda}{1+\lambda}} : \Delta_{A_0A_1A_2} \mapsto \Delta_{P_0P_1P_2}$$

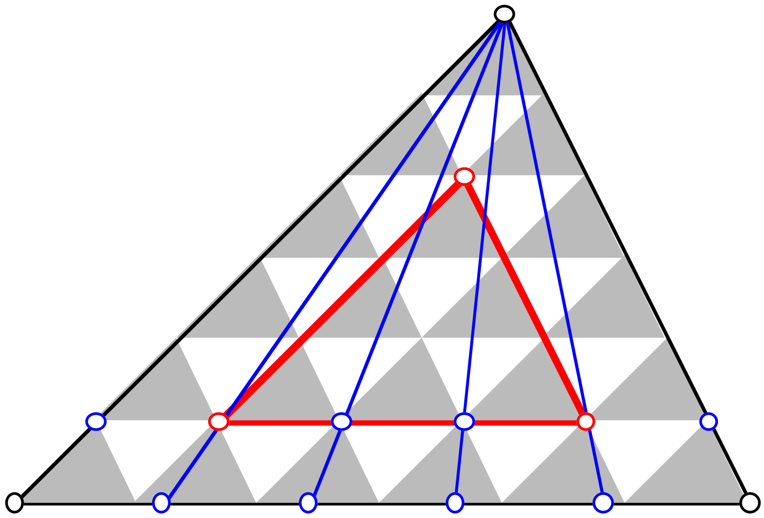
2 Beweis

Wir beweisen den Satz zunächst für rationales λ.

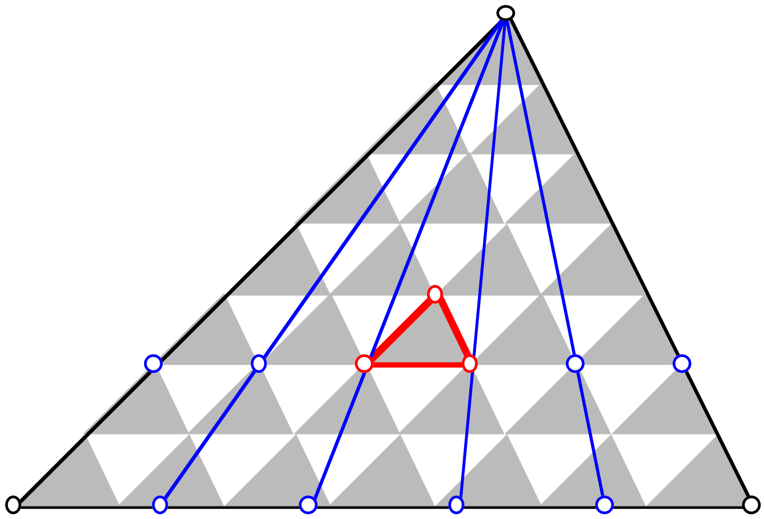
2.1 Rationales Teilverhältnis

Den Beweis verdanke ich Felix, MSG-Schüler der Klasse 12, Berlin.

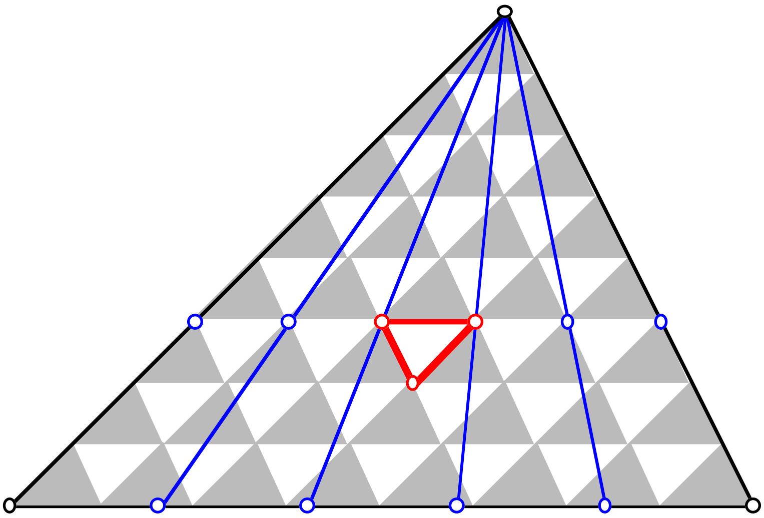
Es sei $\lambda = \frac{k}{n}$ mit $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ und $\mathrm{ggT}(n,k) = 1$. Wir rastern das Dreieck $A_0A_1A_2$ in kanonischer Weise $(n+k)^2$ kongruente Teildreiecke. Die Abbildungen zeigen die Fälle $n = 5$ und der Reihe nach $k = 1, 2, 3, 4$, also $\lambda = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$.



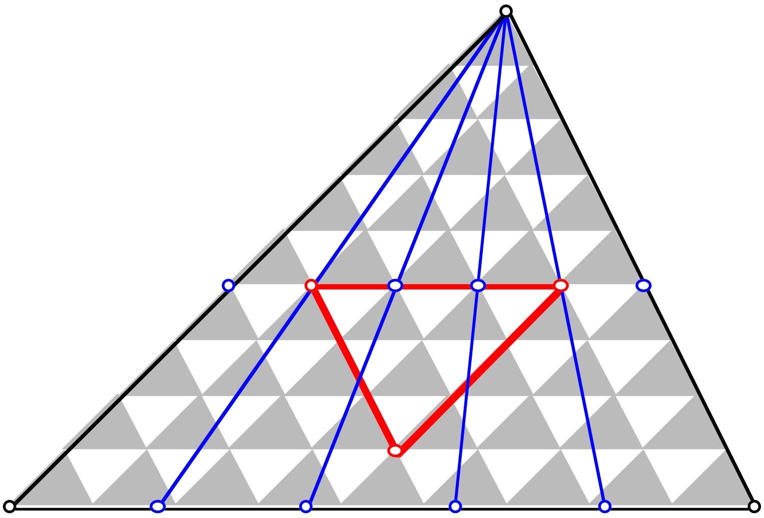
$\lambda = \frac{k}{n} = \frac{1}{5}$



$\lambda = \frac{k}{n} = \frac{2}{5}$



$\lambda = \frac{k}{n} = \frac{3}{5}$



$\lambda = \frac{k}{n} = \frac{4}{5}$

Im Sinne eines proof without words sehen wir für den Streckfaktor *f*:

$$f = \frac{n}{n+k} \frac{n-2k}{n} = \frac{n-2k}{n+k}$$

Schließlich ist:

$$f = \frac{\frac{n}{n} - \frac{2k}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{k}{n}} = \frac{1-2\lambda}{1+\lambda}$$

2.2 Reelles Teilverhältnis

Für $\lambda \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ arbeiten wir mit dem dedekindschen Schnitt.

3 Ergänzungen

3.1 Weitere Teilverhältnisse

Die folgenden Teilverhältnisse lassen sich ebenfalls aus der Rasterung ablesen:

Der Punkt P_i teilt die beiden Ecktransversalen $A_{i-1}B_{i-1}$ und $A_{i+1}C_{i+1}$ so dass:

$$\overrightarrow{A_{i-1}P_i} = \tfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{A_{i-1}B_{i-1}} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{A_{i+1}P_i} = \tfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{A_{i+1}C_{i+1}}$$

Der Punkt P_i teilt die Schwerlinie A_iM_i so dass:

$$\overrightarrow{A_iP_i} = \tfrac{2\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{A_iM_i}$$

3.2 Ecktransversalen außerhalb des Dreieckes

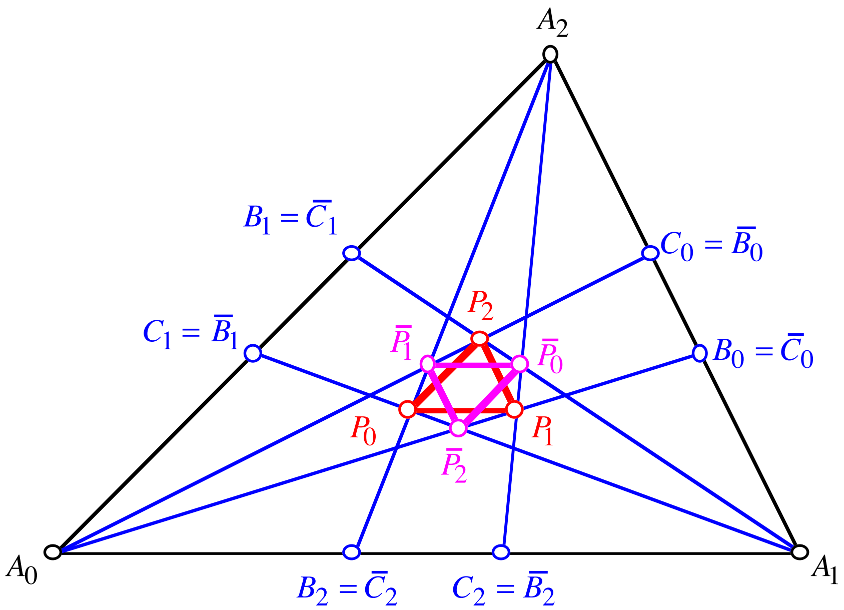
Der Satz gilt für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$. Interessant sind die Sonderfälle der Funktion:

$$f(\lambda) = \tfrac{1-2\lambda}{1+\lambda}$$

Für $\lambda = -1$ hat die Funktion einen Pol. Die beiden Ecktransversalen $A_{i-1}B_{i-1}$ und $A_{i+1}C_{i+1}$ werden parallel. Für $\lambda \to \pm\infty$ ist $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} f(\lambda) = -2$; das Dreieck $P_0P_1P_2$ hat das Ausgangsdreieck $A_0A_1A_2$ als Seitenmittendreieck.

3.3 Komplementarität

Für λ und $\overline{\lambda} = 1-\lambda$ erhalten wir Ecktransversalen, die sich decken. Die Abbildung zeigt die Situation für $\lambda = 0.4$ und $\overline{\lambda} = 0.6$.



Komplementarität

Wegen

$$Z_{S,\frac{1-2\lambda}{1+\lambda}} : \Delta_{A_0A_1A_2} \mapsto \Delta_{P_0P_1P_2}$$

und

$$Z_{S,\frac{1-2\bar{\lambda}}{1+\bar{\lambda}}} : \Delta_{A_0 A_1 A_2} \mapsto \Delta_{\bar{P}_0 \bar{P}_1 \bar{P}_2}$$

folgt:

$$Z_{S,\frac{1-2\bar{\lambda}}{1+\bar{\lambda}}\left(\frac{1-2\lambda}{1+\lambda}\right)^{-1}} : \Delta_{P_0 P_1 P_2} \mapsto \Delta_{\bar{P}_0 \bar{P}_1 \bar{P}_2}$$

Den Streckfaktor können wir vereinfachen:

$$\frac{1-2\bar{\lambda}}{1+\bar{\lambda}}\left(\frac{1-2\lambda}{1+\lambda}\right)^{-1} = \frac{1-2(1-\lambda)}{1+(1-\lambda)}\,\frac{1+\lambda}{1-2\lambda} = \frac{-1+2\lambda}{2-\lambda}\,\frac{1+\lambda}{1-2\lambda} = \frac{\lambda+1}{\lambda-2}$$