

Hans Walser, [20160929]

Lemniskatoid

1 Worum geht es?

Topologische Fragen (Orientierbarkeit) einer speziellen Rotationsfläche

2 Das Lemniskatoid

Wir drehen eine liegende Acht (der Autor hat die Lemniskate genommen, das ist aber unwesentlich) um eine senkrechte Achse durch den Kreuzungspunkt (Abb. 1).



Abb. 1: Lemniskatoid

Die Abbildung 2 zeigt einen Achsenschnitt.

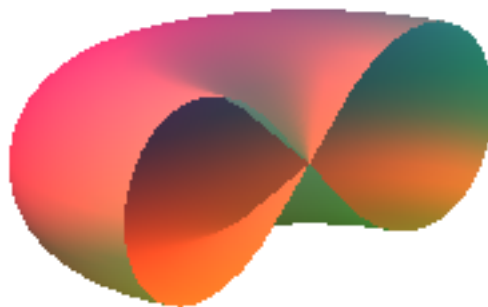


Abb. 2: Achsenschnitt

Topologisch gesehen ist die Lemniskate die Übergangsstelle vom Torus zur Kugel.
Die Abbildung 3 zeigt den Achsenschnitt in der x,z -Ebene.

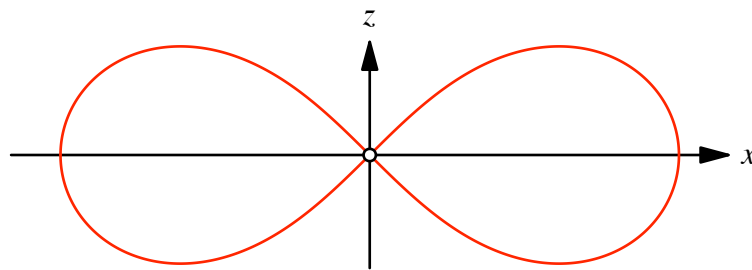


Abb. 3: Lemniskate

3 Orientierbarkeit

Wir gehen der Frage nach, ob das Lemniskatoid orientierbar ist.

3.1 Längs eines Meridians

*Lo duca e io per quel cammino ascoso
intrammo a ritornar nel chiaro mondo;
e senza cura aver d'alcun riposo,*

*salimmo sù, el primo e io secondo,
tanto ch'i' vidi de le cose belle
che porta 'l ciel, per un pertugio tondo.*

*Dante, La Divina Commedia
Inferno, Canto XXXIV*

Prima vista hat man den Eindruck, man könne längs eines Meridians beim Durchgang durch den Kreuzungspunkt vom Inneren ins Äußere gelangen und umgekehrt.

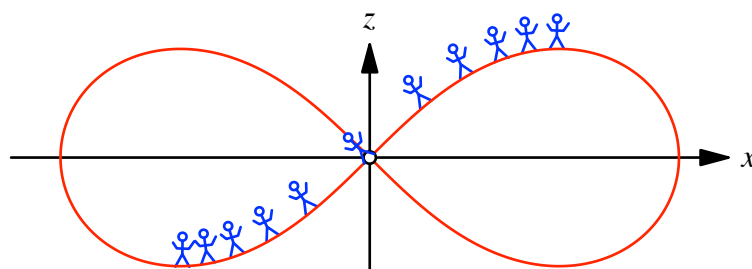


Abb. 4: Durchgang

Damit wäre das Lemniskatoid nicht orientierbar und so eine schöne Sache wie die Kleinsche Flasche.

Damit haben wir allerdings die Rechnung ohne unsere Existenzgrundlage, eben das Lemniskatoid, gemacht.

3.2 Kreuzende Meridiane

*E più corusco e con più lenti passi
teneva il sole il cerchio di merigge,
che qua e là, come li aspetti, fassi,*

*quando s'affisser, sì come s'affigge
chi va dinanzi a gente per iscorta
se trova novitate o sue vestigge,*

*le sette donne al fin d'un'ombra smorta,
qual sotto foglie verdi e rami nigri
sovra suoi freddi rivi l'alpe porta.*

*Dante, La Divina Commedia
Purgatorio, Canto XXXIII*

Die Abbildung 5 zeigt einen Ausschnitt beim Kreuzungspunkt.

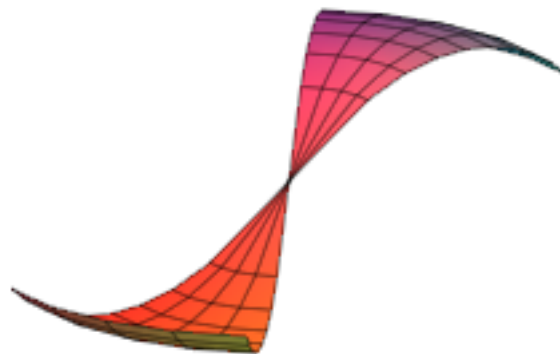


Abb. 5: Ausschnitt

Ein durch zwei Meridiane begrenzter Streifen verhält sich beim Kreuzungspunkt wie ein Möbiusband. Er wird getwistet. Ein Wanderer auf diesem Streifen wird mitgedreht und befindet sich nach dem Durchgang wieder auf derselben Seite wie vorher (Abb. 6).

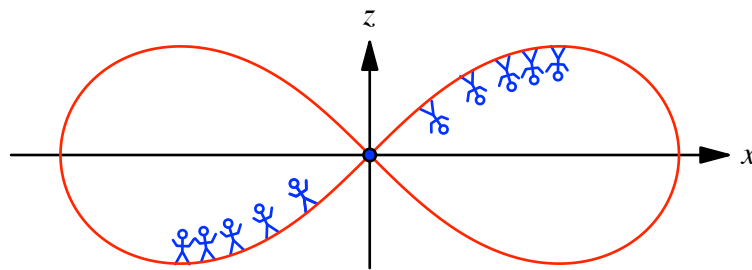


Abb. 6: Da gibt es kein Entrinnen

Somit ist das Lemniskatoid orientierbar.

4 Ausdehnung

Wir modifizieren unsere Fläche wie folgt. Wir beginnen mit einem halben Lemniskatoid (Abb. 2) und setzen einen liegenden Lemniskatenzylinder an (Abb. 7).



Abb. 7: Ansetzen eines Lemniskatenzylinders

Im Zylinderteil können wir gemäß Abbildung 4 von innen nach außen gelangen, ohne Möbius-Twist. Die Gesamtfläche der Abbildung 7 ist daher nicht mehr orientierbar.

Der Symmetrie zuliebe schließen wir die Fläche mit einem zweiten halben Lemniskatoid ab (Abb. 8).



Abb. 8: Abschluss

Die Abbildung 9 zeigt einen Ausschnitt aus der Fläche der Abbildung 8. Der Ausschnitt ist ein Möbius-Band.



Abb. 9: Möbius-Band

5 Nachtrag: Stehendes Lemniskatoid

Natürlich hätten wir dieselben Überlegungen auch am stehenden Lemniskatoid (Abb. 10) durchführen können.



Abb. 10: Hora incerta