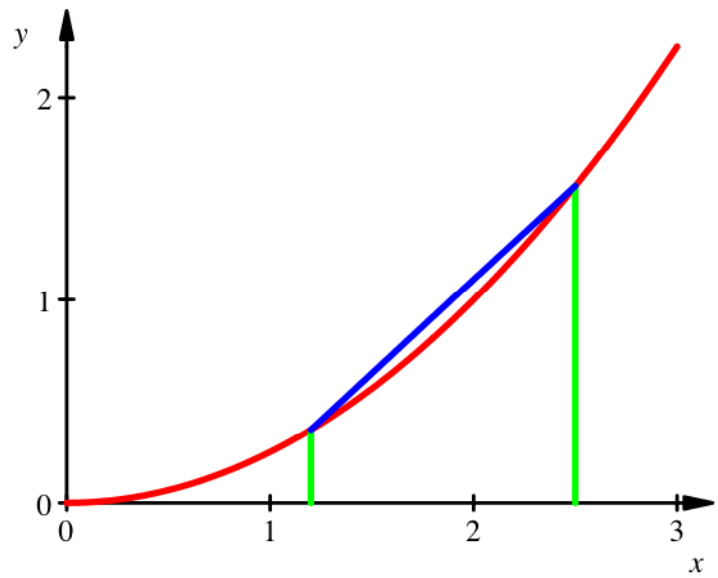
Hans Walser, [20090828a]

Lineare und bilineare Interpolation

1 Lineare Interpolation

Von einer Funktion $f: x \mapsto y$ sind zwei Stützwerte $f(x_0)$ und $f(x_1)$ bekannt. Für $\xi \in [x_0, x_1]$ kann dann die Funktion linear interpoliert werden:

$$f(\xi) \approx f(x_0) + (\xi - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



Funktionsgraf und lineare Interpolation

2 Bilineare Interpolation

Wir verallgemeinern das auf eine Funktion von zwei Variablen $f: (x, y) \mapsto z$. Es seien vier Stützwerte $f(x_0, y_0), f(x_0, y_1), f(x_1, y_0), f(x_1, y_1)$ bekannt. Wir interpolieren an der Stelle $(\xi, \eta) \in [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$.

Zunächst ist:

$$f(\xi, y_0) \approx f(x_0, y_0) + (\xi - x_0)\frac{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_1 - x_0}$$

und

$$f(\xi, y_1) \approx f(x_0, y_1) + (\xi - x_0)\frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)}{x_1 - x_0}$$

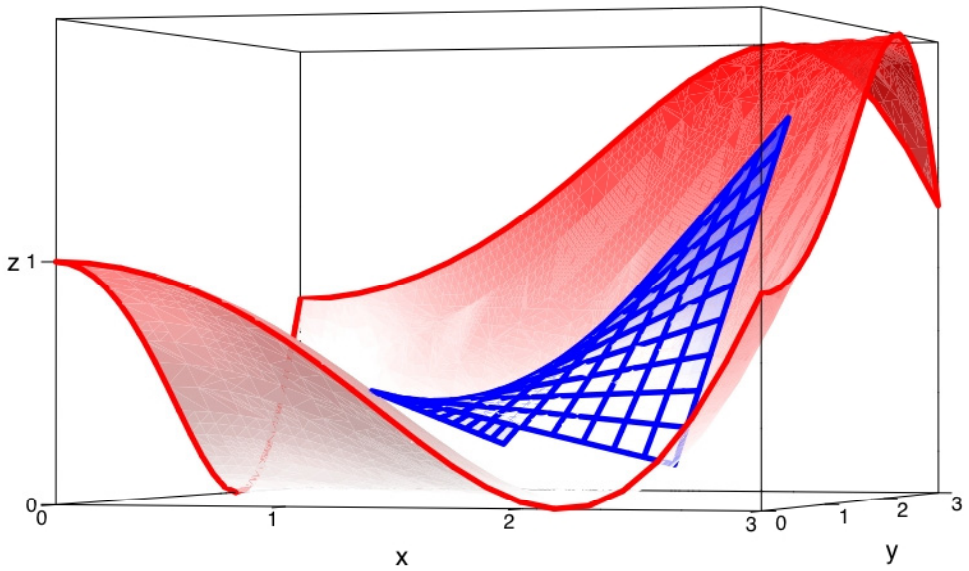
Weiter:

$$f(\xi, \eta) \approx f(\xi, y_0) + (\eta - y_0)\frac{f(\xi, y_1) - f(\xi, y_0)}{y_1 - y_0}$$

Nun setzen wir die obigen Approximationen ein:

$$
\begin{aligned}
f(\xi,\eta) &\approx f(\xi,y_0)+(\eta-y_0)\frac{f(\xi,y_1)-f(\xi,y_0)}{y_1-y_0}\\
&\approx f(x_0,y_0)+(\xi-x_0)\frac{f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)}{x_1-x_0}\\
&\qquad +(\eta-y_0)\frac{\left(f(x_0,y_1)+(\xi-x_0)\frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)}{x_1-x_0}\right)-\left(f(x_0,y_0)+(\xi-x_0)\frac{f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)}{x_1-x_0}\right)}{y_1-y_0}\\
&= f(x_0,y_0)\left(1-\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}-\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}+\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\right)\\
&\qquad +f(x_0,y_1)\left(\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}-\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\right)+f(x_1,y_0)\left(\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}-\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\right)\\
&\qquad +f(x_1,y_1)\left(\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\right)\\
&= f(x_0,y_0)+\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\left(f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)\right)+\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\left(f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0)\right)\\
&\qquad +\frac{\xi-x_0}{x_1-x_0}\frac{\eta-y_0}{y_1-y_0}\left(f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)-f(x_0,y_1)+f(x_0,y_0)\right)
\end{aligned}
$$

Die Interpolationsfläche ist ein Hyperboloid. Es ist eine gekrümmte Fläche, sie enthält aber zwei Scharen von Geraden.



Funktionsgraf und bilineare Approximation