Hans Walser, [20171028]

Logarithmen und Fibonacci

Anregung: Jo Niemeyer, Berlin

1 Worum geht es?

Da die Fibonacci-Zahlen näherungsweise exponentiell wachsen, wachsen die Logarithmen davon näherungsweise linear. Es werden numerische und grafische Beispiele dazu gegeben.

2 Der Goldene Logarithmus

Mit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bezeichnen wir den Goldenen Schnitt (Walser 2013).

Unter dem Goldenen Logarithmus verstehen wir den Logarithmus zur Basis ϕ. Er wird wie folgt berechnet:

$$\log_{\phi}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(\phi)} \tag{1}$$

Der natürliche Logarithmus ln( ) in der Formel (1) kann durch irgend einen anderen Logarithmus ersetzt werden.

3 Die Lucas-Zahlen

Mit den Startwerten 1 und 3 und der üblichen Fibonacci-Rekursion erhalten wir die Luccas-Zahlen:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots \tag{2}$$

Die Tabelle 1 gibt die Lucas-Zahlen und den Logarithmus zur Goldenen Basis davon.

n	L_n	$\log_\phi(L_n)$
1	1	0.
2	3	2.283011831
3	4	2.880840183
4	7	4.043770434
5	11	4.983034810
6	18	6.006443753
7	29	6.997533430
8	47	8.000941383
9	76	8.999640321
10	123	10.00013738
11	199	10.99994754
12	322	12.00002005
13	521	12.99999236
14	843	14.00000294
15	1364	14.99999889
16	2207	16.00000044
17	3571	16.99999985
18	5778	18.00000008
19	9349	18.99999999
20	15127	20.00000003

Tab. 1: Lucas-Zahlen und Goldener Logarithmus

Wir sehen, dass sich die Goldenen Logarithmen den natürlichen Zahlen annähern. Hintergrund: Die Lucas-Zahlen können durch die Formel von Binet generiert werden:

$$L_n = \phi^n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n \tag{3}$$

Der zweite Summand geht gegen null.

Die Abbildung 1 gibt die ersten zehn Treppenstufen für $\log_\phi\left(L_n\right)$.

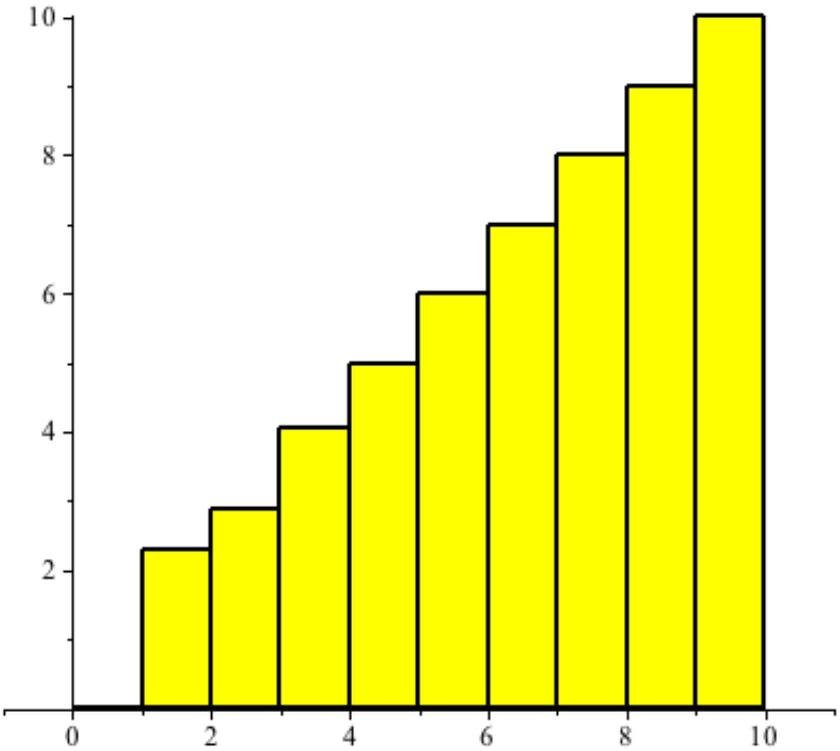

Abb. 1: Treppenstufen

Die Treppe wächst zuerst unregelmäßig, und dann immer regelmäßiger.

4 Die Fibonacci-Zahlen

Bei den Fibonacci-Zahlen müssen wir einen Korrekturterm $+\log_{\phi}\left(\sqrt{5}\right) \approx 1.672275940$ addieren.

n	F_n	$\log_{\phi}\left(F_n\right)$	$\log_{\phi}\left(F_n\right)+\log_{\phi}\left(\sqrt{5}\right)$
1	1	0.	1.672275940
2	1	0.	1.672275940
3	2	1.440420092	3.112696032
4	3	2.283011831	3.955287771
5	5	3.344551878	5.016827818
6	8	4.321260276	5.993536216
7	13	5.330187717	7.002463657
8	21	6.326782265	7.999058205
9	34	7.328083693	9.000359633
10	55	8.327586688	9.999862628
11	89	9.327776543	11.00005248
12	144	10.32770403	11.99997997
13	233	11.32773173	13.00000767
14	377	12.32772115	13.99999709
15	610	13.32772519	15.00000113
16	987	14.32772365	15.99999959
17	1597	15.32772424	17.00000018
18	2584	16.32772401	17.99999995
19	4181	17.32772410	19.00000004
20	6765	18.32772407	20.00000001

Tab. 2: Fibonacci-Zahlen

Hintergrund: In der Binet-Formel

$$F_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n\right) \qquad (4)$$

müssen wir den Faktor $\frac{1}{\sqrt{5}}$ austricksen.

Allerdings würde die Treppe auch ohne Korrekturterm immer gleichmäßiger wachsen. Wir kämen aber nicht gegen die natürlichen Zahlen.

Die Abbildung 2 gibt die ersten 10 Treppenstufen für $\log_{\phi}(F_n)+\log_{\phi}(\sqrt{5})$.

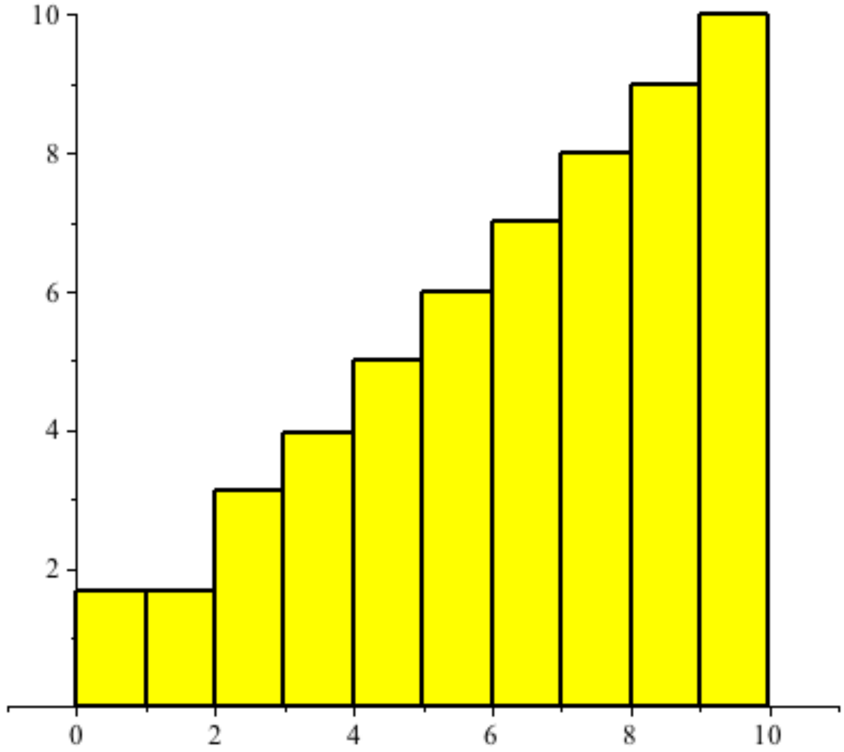

Abb. 2: Treppenstufen

Literatur

Walser, Hans (2013): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.