Hans Walser, [20200716]

Logarithmische Kantenmittenspirale

Anregung: M. E., B.

1 Worum geht es

Gesucht ist eine eckige logarithmische Spirale aus Streckenzügen, welche sich selber in- und umbeschrieben ist und sich in den Kantenmitten berührt.

2 Beispiel

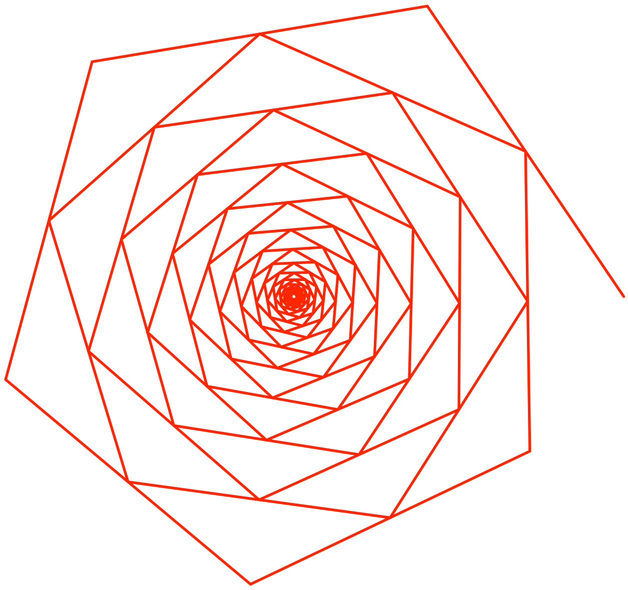

Abb. 1: Beispiel

Die Abbildung 1 zeigt eine eckige logarithmische Spirale. Die Streckenlängen nehmen schrittweise um denselben Faktor $q = 0.9691929055$ ab. Die Richtungsänderung (Außenwinkel) ist an jeder Ecke gleich, nämlich $65.35002089°$ im positiven Drehsinn. Der Endpunkt der sechsten Strecke ist der Mittelpunkt der ersten Strecke. Auch alle nachfolgenden Eckpunkte sind Mittelpunkte von Spiralen-Strecken.

Eine eckige logarithmische Spirale ist bis auf Ähnlichkeit durch den konstanten Längenveränderungsfaktor q und die konstante Richtungsänderung bestimmt.

Wir fragen nach diesen beiden Bestimmungsdaten unter der zusätzlichen Bedingung, dass der Endpunkt der n-ten Strecke der Mittelpunkt der ersten Strecke ist.

3 Die Gleichung

Wir arbeiten exemplarisch für $n = 6$ in der Gaußschen Ebene der komplexen Zahlen (Abb. 2). Der Schlüssel zu unserer Aufgabe ist die komplexe Zahl z. Ihr Betrag ist der Längen-Veränderungsfaktor q, ihr Argument die Richtungsänderung.

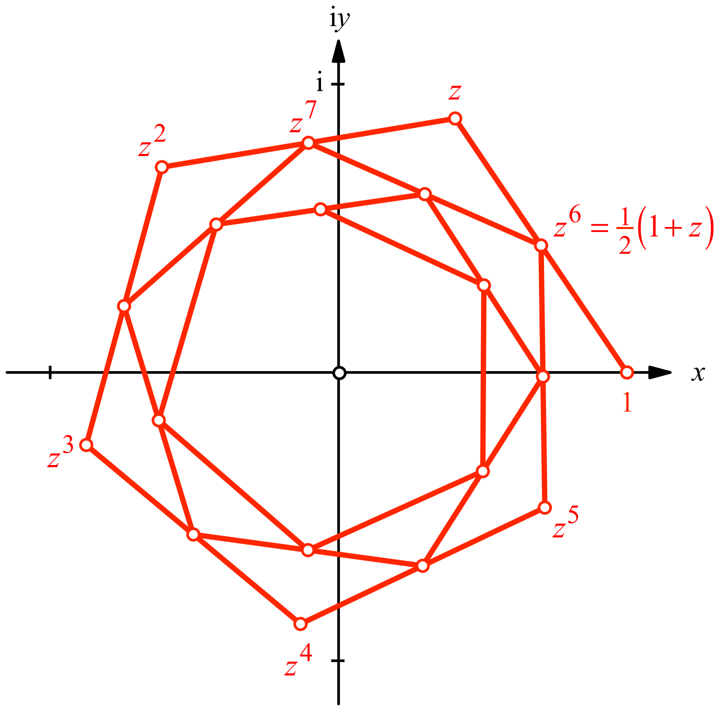

Abb. 2: Überlegungsfigur

Die Bedingung, dass der Endpunkt der sechsten Strecke auf den Mittelpunkt der ersten Strecke zu liegen kommen muss, heißt:

$$z^6 = \tfrac{1}{2}(1+z) \tag{1}$$

Im allgemeinen Fall erhalten wir die Gleichung:

$$z^n = \tfrac{1}{2}(1+z) \tag{2}$$

4 Lösungsübersicht

Die Gleichung (2) hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra in der komplexen Ebene genau n Lösungen.

Eine triviale Lösung ist $z = 1$. Diese Lösung ist für uns nicht relevant.

Wir machen eine Paritätsunterscheidung bezüglich n.

4.1 *n* gerade

Die Tabelle 1 zeigt exemplarisch die Lösungen für $n = 6$. Die Lösungen sind mit dem Index k nummeriert.

k	z_k	$\lvert z_k \rvert$	$\arg(z_k)$
1	1	1	0°
2	0.4042249299 + 0.8808729160i	0.9691929055	65.35002089°
3	–0.5440186493 + 0.6655179335i	0.8595757155	129.2638176°
4	–0.7204125613	0.7204125613	180°
5	–0.5440186493 – 0.6655179335i	0.8595757155	––129.2638176°
6	0.4042249299 – 0.8808729160i	0.9691929055	–65.35002089°

Tab. 1: Lösungen für *n* = 6

Die Abbildung 3 zeigt die Verteilung dieser Lösungen in der Gaußschen Ebene der komplexen Zahlen. Der blaue Kreis ist der Einheitskreis.

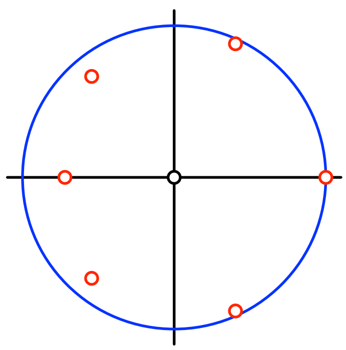

Abb. 3: Lösungen für *n* = 6

Neben der trivialen Lösung $z_1 = 1$ haben wir noch eine zweite reelle Lösung. Die übrigen Lösungen sind paarweise konjugiert komplex und liegen daher spiegelbildlich bezüglich der reellen Achse.

4.2 *n* ungerade

Die Tabelle 2 zeigt exemplarisch die Lösungen für $n = 7$.

k	z_k	$\lvert z_k \rvert$	$\arg(z_k)$
1	1	1	0°
2	0.5581619009 + 0.8073355575i	0.9814965155	55.34145396°
3	–0.3174374594 + 0.8613972540i	0.9180260181	110.2295783°
4	–0.7407244414 + 0.2592065099i	0.7847679357	160.7131957°
5	–0.7407244414 – 0.2592065099i	0.7847679357	–160.7131957°
6	–0.3174374594 – 0.8613972540i	0.9180260181	–110.2295783°
7	0.5581619009 – 0.8073355575i	0.9814965155	–55.34145396°

Tab. 2: Lösungen für *n* = 7

Die Abbildung 4 zeigt die Verteilung dieser Lösungen.

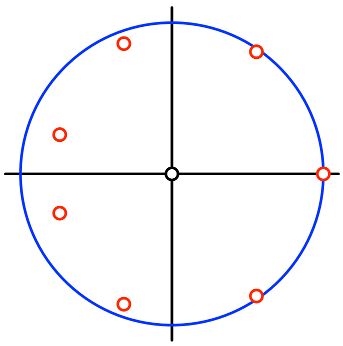

Abb. 4: Lösungen für *n* = 7

Die einzige reelle Lösung ist $z_1 = 1$. Die übrigen Lösungen sind paarweise konjugiert komplex.

4.3 Hintergrund

Die Gleichung (2) ist eine leicht gestörte Kreisteilungsgleichung. Die (ungestörte) Kreisteilungsgleichung lautet:

$$z^n = 1 \qquad (3)$$

Die n Lösungen der Kreisteilungsgleichung bilden ein regelmäßiges n-Eck auf dem Einheitskreis.

5 Bildergalerie

5.1 $n = 6$

Die Lösungen beziehen sich auf die Tabelle 1.

Die triviale Lösung $z_1 = 1$ gibt nichts.

Aus der Lösung $z_2 = 0.4042249299 + 0.8808729160i$ erhalten wir die Spirale der Abbildung 5.2 (entspricht der Abbildung 1).

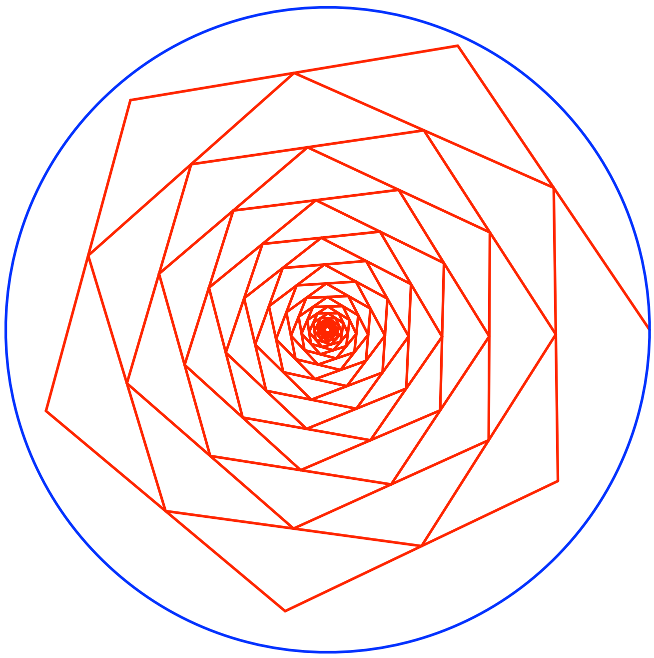

Abb. 5.2: Spirale

Aus der Lösung $z_3 = -0.5440186493 + 0.6655179335i$ erhalten wir die überschlagene Spirale der Abbildung 5.3.

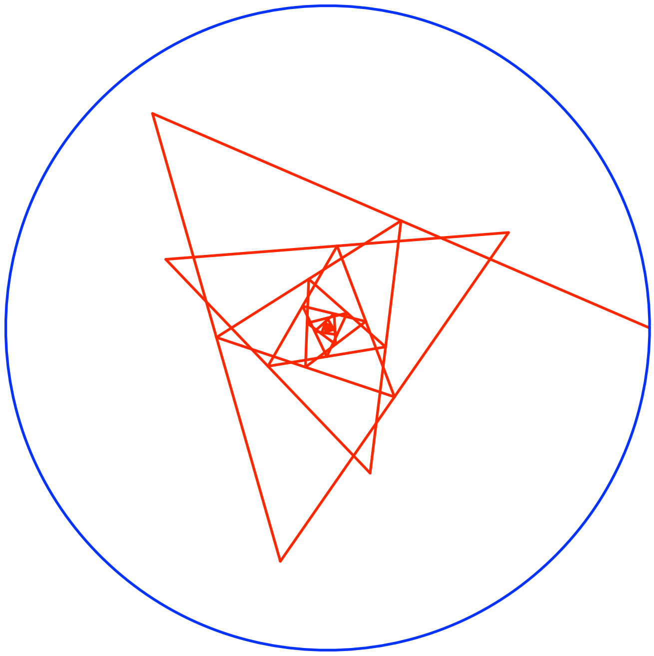

Abb. 5.3: Überschlagene Spirale

Die Leserin oder der Leser kann mit dem Finger nachprüfen, dass tatsächlich der Endpunkt der sechsten Strecke im Mittelpunkt der ersten Strecke liegt (Abb. 5.3a).

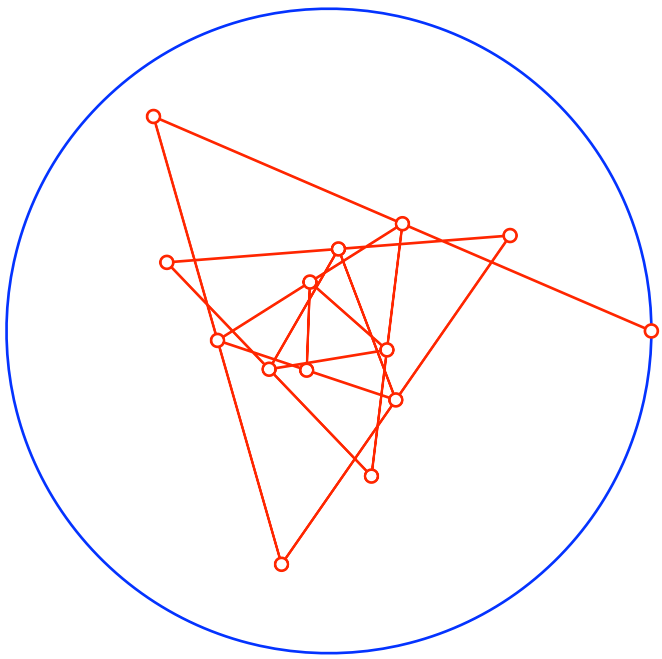

Abb. 5.3a: Endpunkte und Mittelpunkte

Aus der reellen Lösung $z_4 = -0.7204125613$ erhalten wir ein Hin-und-her auf der reellen Achse (Abb. 5.4).

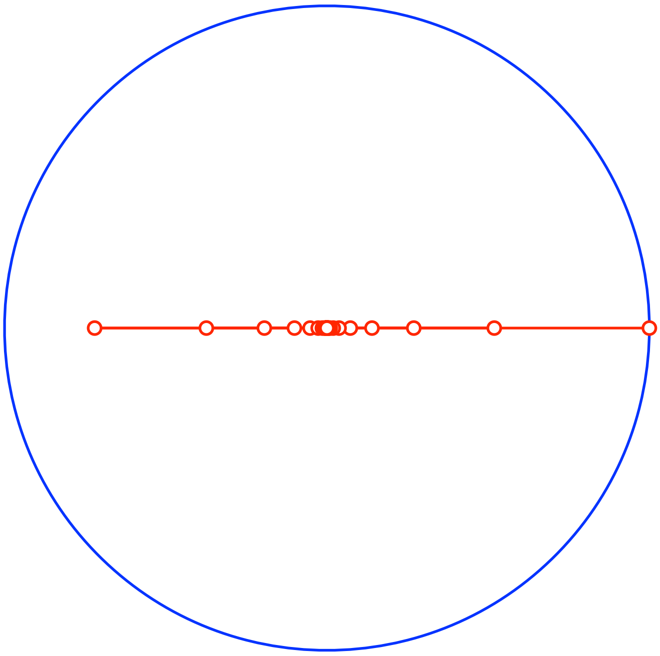

Abb. 5.4: Hin-und-her

Aus der Lösung $z_5 = -0.5440186493 - 0.66551793335i$ erhalten wir die überschlagene Spirale der Abbildung 5.5. Sie ist spiegelbildlich zur Spirale der Abbildung 5.3, da die zugehörigen Lösungen konjugiert komplex sind.

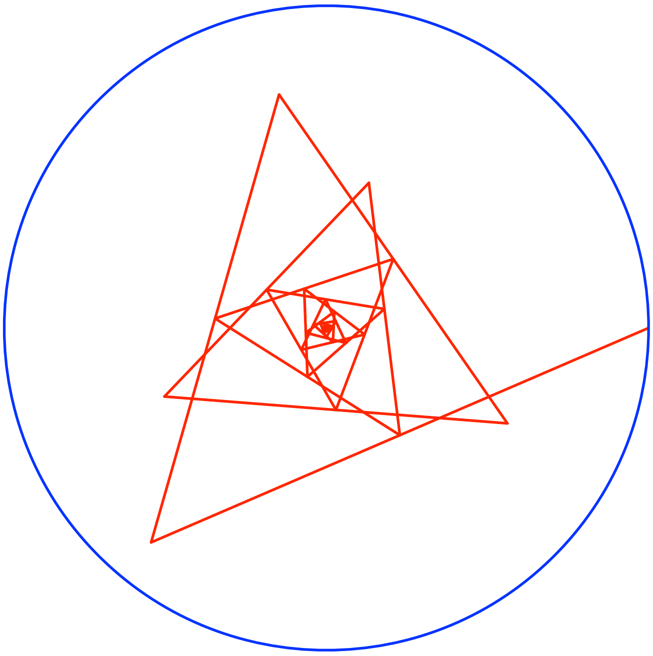

Abb. 5.5: Überschlage Spirale

Aus der Lösung $z_6 = 0.4042249299 - 0.8808729160i$ erhalten wir die Spirale der Abbildung 5.6. Sie ist spiegelbildlich zur Spirale der Abbildung 5.2.

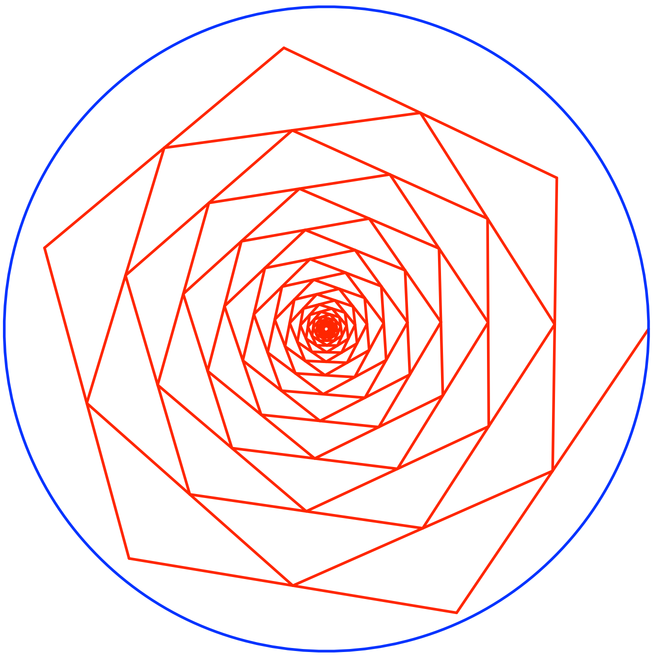

Abb.5.6: Spirale

5.2 $n = 7$

Die Lösungen beziehen sich auf die Tabelle 2.

Die triviale Lösung $z_1 = 1$ gibt nichts.

Aus der Lösung $z_2 = 0.5581619009 + 0.8073355575i$ erhalten wir die Spirale der Abbildung 6.2.

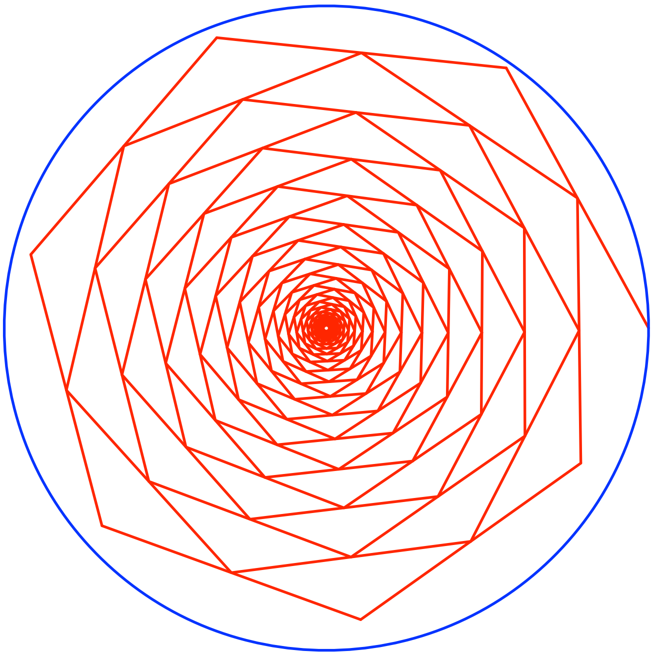

Abb. 6.2: Spirale

Aus der Lösung $z_3 = -0.3174374594 + 0.8613972540i$ erhalten wir die überschlagene Spirale der Abbildung 6.3.

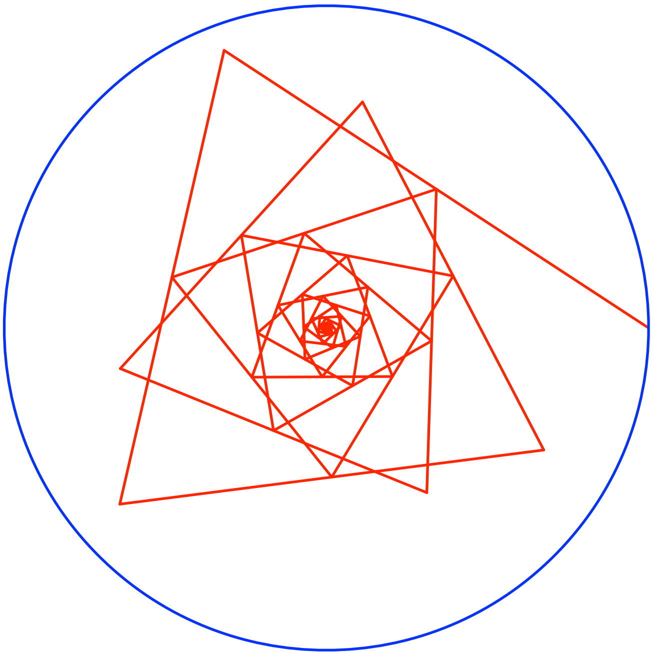

Abb. 6.3: Überschlage Spirale

Aus der Lösung $z_4 = -0.7407244414 + 0.2592065099i$ erhalten wir die überschlagene Spirale der Abbildung 6.4.

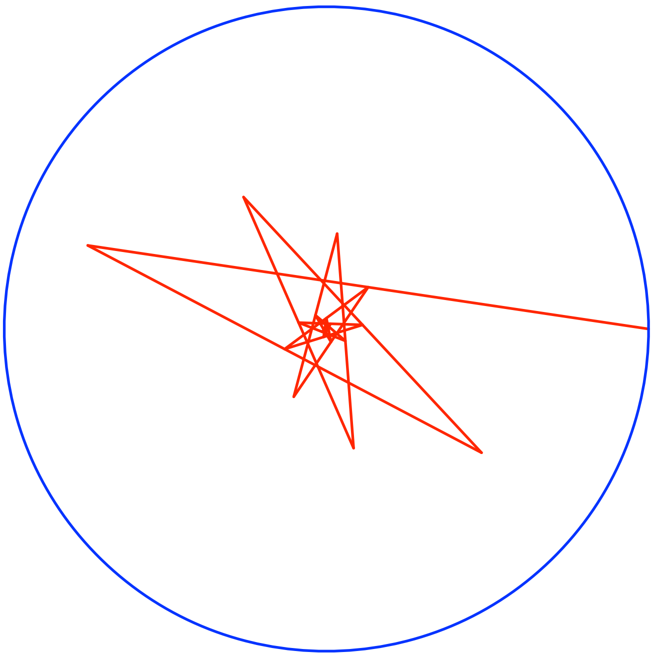

Abb. 6.4: Überschlagene Spirale

Aus den weiteren, konjugiert komplexen Lösungen ergeben sich entsprechend spiegelbildliche Spiralen.

5.3 n = 3

Der Fall $n = 3$ führt zu einer bekannten Figur. Zunächst die numerischen Lösungen (Tab. 3).

k	z_k	$\lvert z_k \rvert$	$\arg(z_k)$
1	1	1	0°
2	–0.5000000000 + 0.5000000000i	0.7071067810	135°
3	–0.5000000000 – 0.5000000000i	0.7071067810	–135°

Tab. 3: Lösungen für n = 3

Das sind natürlich exakt darstellbare Werte (Tab. 4).

k	z_k	$\lvert z_k \rvert$	$\arg(z_k)$
1	1	1	0°
2	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	135°
3	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	–135°

Tab. 4: Exakte Werte für n = 3

Die Abbildung 7 zeigt die Verteilung dieser Lösungen.

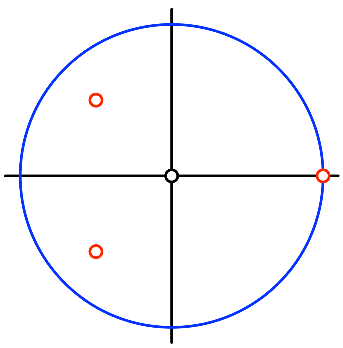

Abb. 7: Lösungen für n = 3

Aus der Lösung $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ erhalten wir die Spirale der Abbildung 8.2.

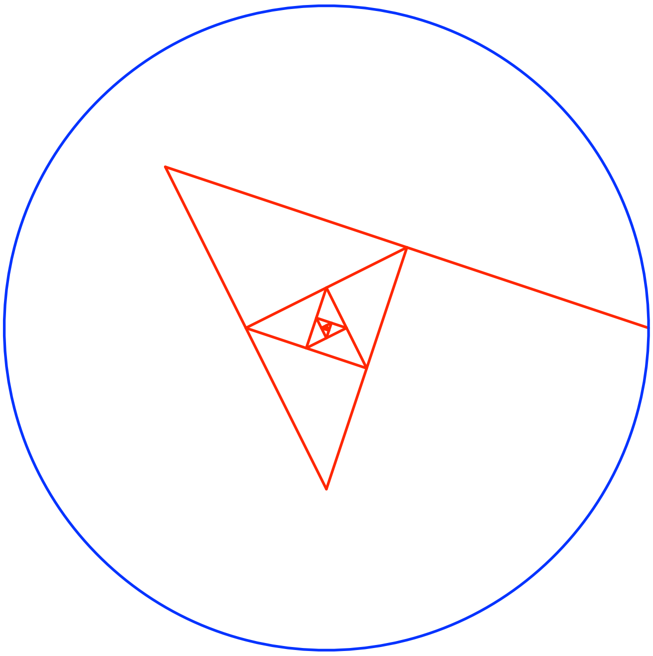

Abb. 8.2: Rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke

Die Spirale ergibt sich durch fortlaufendes Halbieren eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks.

6 Ausblick

Wir können die Mittelpunkte ersetzen durch andere Teilpunkte. Wir können zum Beispiel verlangen, dass der Endpunkt der *n*-ten Strecke der erste Drittelpunkt der ersten Strecke wird. Dazu müssen wir die Gleichung (2) abändern in:

$$z^n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}z \tag{4}$$

Die Abbildung 9 zeigt ein Beispiel für $n = 6$. Wir glauben dabei noch zusätzliche Spiralen zu erkennen.

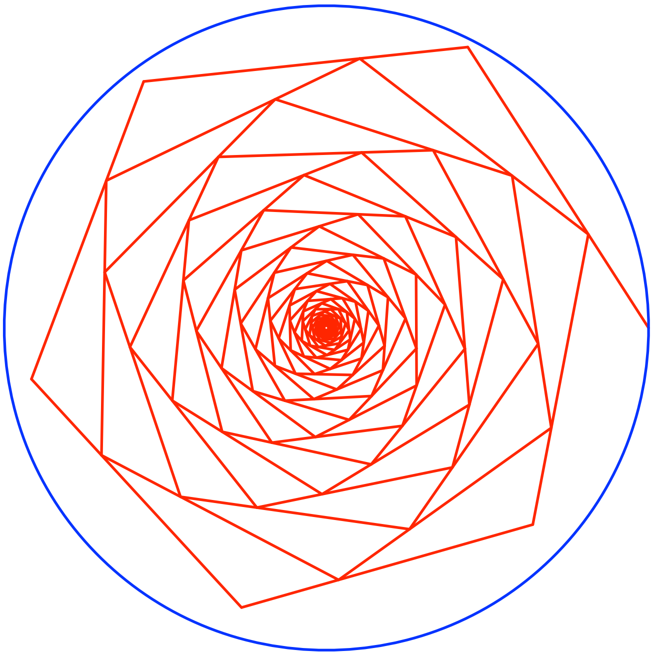

Abb. 9: Drittelpunkte

Websites

Hans Walser: Logarithmische Kantenmittenspiralen
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Log_Kantenmittenspiralen/Log_Kantenmittenspiralen.htm
Hans Walser: Spiralen im regelmäßigen Vieleck
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Spiralen_reg_Vieleck/Spiralen_reg_Vieleck.htm
Hans Walser: Kantenmittenspirale
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kantenmittenspirale/Kantenmittenspirale.htm