Hans Walser, [20201116]

Lotschnittpunkt

1 Worum geht es?

Schnittpunkt von Loten auf archimedische Spiralen

2 Konstruktion

Wir verdrehen eine archimedische Spirale (Abb. 1a) mit der Polardarstellung

$$r(\phi) = a\phi \qquad (1)$$

um den Ursprung um beliebige Winkel (Abb. 1b).

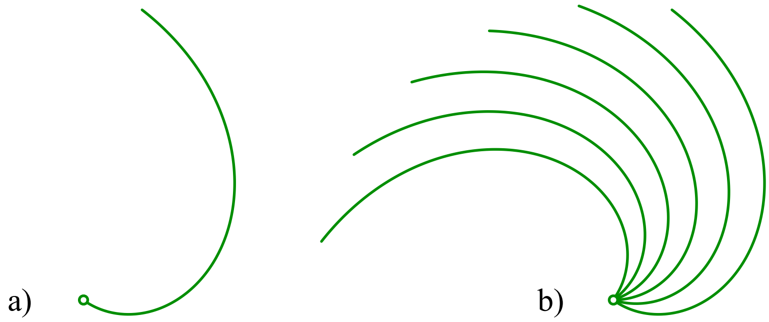

Abb. 1: Archimedische Spiralen

Wir schneiden die Spiralenschar mit einem vom Ursprung ausgehenden Strahl (Abb. 2a).

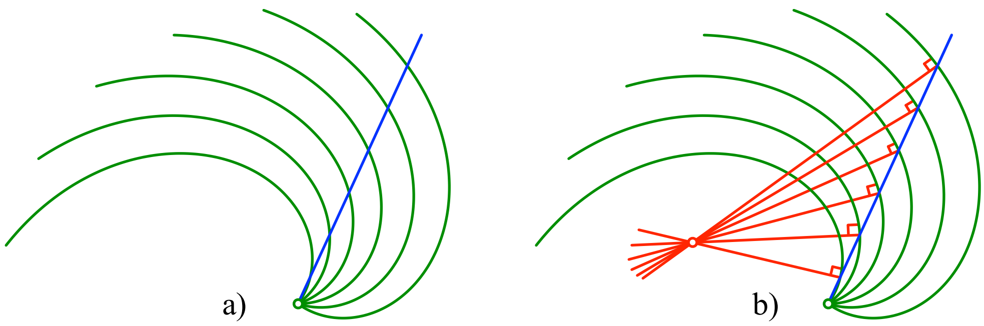

Abb. 2: Gemeinsamer Schnittpunkt

In den Schnittpunkten zeichnen wir die Lote (Normalen) der archimedischen Spiralen. Diese Lote schneiden sich ein einem gemeinsamen Punkt (Abb. 2b).

3 Beweis

Eine um den Winkel θ verdrehte archimedische Spirale hat in kartesischen Koordinaten die Darstellung:

$$\vec{x}(\phi)=\begin{bmatrix} a\phi\cos(\phi+\theta) \\ a\phi\sin(\phi+\theta) \end{bmatrix}, \quad \phi\in[0,\infty) \tag{2}$$

Daraus ergibt sich der Tangentialvektor:

$$\dot{\vec{x}}(\phi)=\begin{bmatrix} a\cos(\phi+\theta)-a\phi\sin(\phi+\theta) \\ a\sin(\phi+\theta)+a\phi\cos(\phi+\theta) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Für den Normalvektor erhalten wir:

$$\vec{n}(\phi)=\begin{bmatrix} -a\sin(\phi+\theta)-a\phi\cos(\phi+\theta) \\ a\cos(\phi+\theta)-a\phi\sin(\phi+\theta) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Die Normale hat also die Gleichung:

$$\vec{x}(\phi)+s\vec{n}(\phi) \tag{5}$$

Für den Strahl setzen wir:

$$\lambda\begin{bmatrix} \cos(\phi_0) \\ \sin(\phi_0) \end{bmatrix}, \quad \lambda\geq 0 \tag{6}$$

Im Schnittpunkt mit der verdrehten archimedischen Spirale ist:

$$\phi+\theta=\phi_0, \text{ also } \phi=\phi_0-\theta \tag{7}$$

Wir setzen (7) und $s=1$ in (5) ein:

$$
\begin{aligned}
\vec{x}(\phi)+s\vec{n}(\phi)=\vec{x}(\phi_0-\theta)+1\vec{n}(\phi_0-\theta)& \\
=\begin{bmatrix} a(\phi_0-\theta)\cos(\phi_0) \\ a(\phi_0-\theta)\sin(\phi_0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a\sin(\phi_0)-a(\phi_0-\theta)\cos(\phi_0) \\ a\cos(\phi_0)-a(\phi_0-\theta)\sin(\phi_0) \end{bmatrix}& \qquad (8) \\
=\begin{bmatrix} -a\sin(\phi_0) \\ a\cos(\phi_0) \end{bmatrix}&
\end{aligned}
$$

Dies beschreibt einen Punkt auf der Normalen der um θ verdrehten archimedischen Spirale. Der Punkt ist aber unabhängig von θ und daher gemeinsamer Schnittpunkt aller Normalen.

Aus (8) ergibt sich zusätzlich, dass dieser Schnittpunkt vom Ursprung den Abstand a hat und dass die Strecke vom Ursprung zu diesem Schnittpunkt rechtwinklig zum vom Ursprung ausgehenden Strahl ist.

Weblinks

Hans Walser: Lotschnittpunkt

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lotschnittpunkt/Lotschnittpunkt.htm