Hans Walser, [20180714]

Minimalellipse

1 Problemstellung

Zu zwei kongruenten sich berührenden Kreisen ist die flächenmäßig kleinste Ellipse zu bestimmen, welche die beiden Kreise umfasst (Abb. 1).

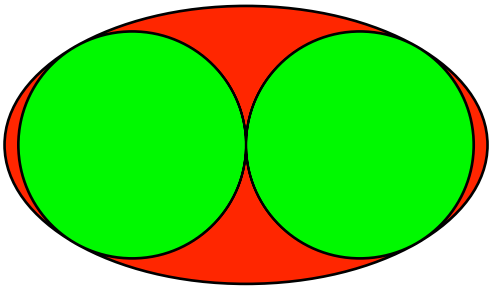

Abb. 1: Problemstellung

2 Bearbeitung

2.1 Konstruktion im allgemeinen Fall

Aus Symmetriegründen hat die gesuchte Ellipse dieselben Achsen wie die Konfiguration aus den beiden gegebenen Kreisen.

Wir wählen auf einem der beiden Kreise mit dem Mittelpunkt M_1 einen laufenden Punkt P (Abb. 2a) und konstruieren die Ellipse, welche den Kreis in P berührt.

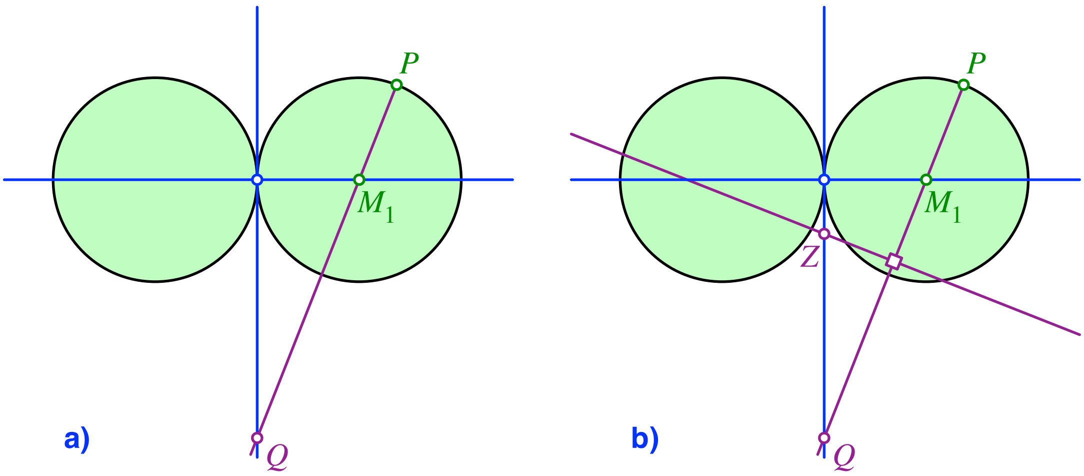

Abb. 2: Erste Schritte der Konstruktion

Dazu schneiden wir die Gerade PM_1 mit der senkrechten Achse und erhalten so den Punkt Q.

Die Mittelsenkrechte der Strecke PQ schneiden wir ebenfalls mit der senkrechten Achse und erhalten den Punkt Z.

Den Kreis z um Z durch P (und Q) schneiden wir mit der waagerechten Achse in den beiden Punkten F_1 und F_2 (Abb. 3a).

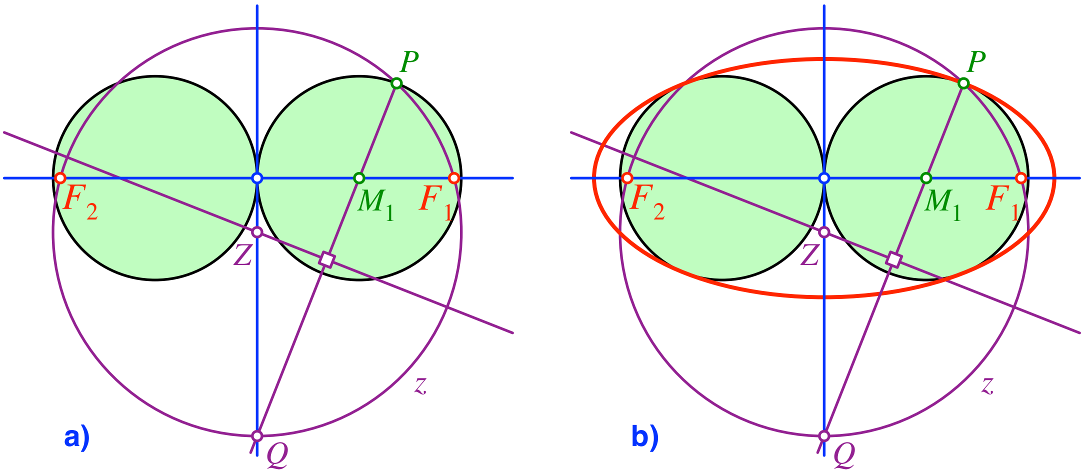

Abb. 3: Brennpunkte und Ellipse

Diese beiden Punkte sind die Brennpunkte der gesuchten Ellipse. Zusammen mit P haben wir die nötigen Informationen für die Ellipse.

Die Stimmigkeit dieser Konstruktion ergibt sich aus [1].

2.2 Berechnungen für den optimalen Fall

Wir verwenden die Symmetrieachsen als Achsen des kartesischen Koordinatensystems. Die Einheit sei der Radius der beiden gegebenen Kreise. Den Punkt P parametrisieren wir mit:

$$P\left(1+\cos(t),\sin(t)\right), \quad t \in \left[0,\tfrac{\pi}{2}\right] \tag{1}$$

Damit rechnen wir die Konstruktion gemäß den Abbildungen 2 und 3 durch und erhalten den Flächeninhalt der Ellipse als Funktion von t. Schließlich muss noch die Ableitung dieser Funktion null gesetzt werden. Mit CAS erhalten wir im relevanten Bereich die Lösung:

$$t = \tfrac{\pi}{3} \tag{2}$$

Die Abbildung 4 zeigt rot den Funktionsgrafen der Flächenfunktion und blau die Ableitung. Das Minimum ist bei $t = \frac{\pi}{3}$.

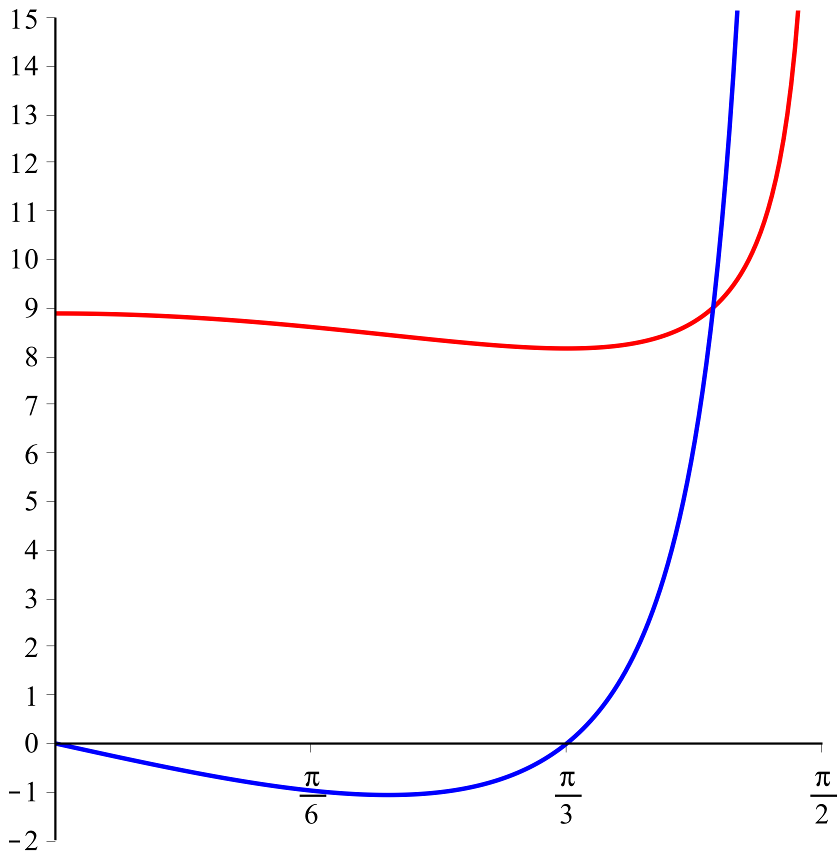

Abb. 4: Flächenfunktion und Ableitung

Die Abbildung 1 zeigt den optimalen Fall.

3 Diskussion des optimalen Falles

Im optimalen Fall, also für $t = \frac{\pi}{3}$ erhalten wir die Ellipsenachsen:

$$a = \tfrac{3}{2}\sqrt{2} \quad , \quad b = \tfrac{1}{2}\sqrt{6} \quad , \quad \tfrac{a}{b} = \sqrt{3} \tag{3}$$

Der Flächeninhalt der Ellipse ist:

$$\text{Flächeninhalt} = \tfrac{3}{2}\pi\sqrt{3} \approx 8.1621 \tag{4}$$

Die Abbildung 5 zeigt nochmals die Minimallösung. Der Punkt *Z* (vgl. Abb. 3) ist nun im Zentrum der Figur. Die Figur lässt sich weitgehend in ein reguläres Dreiecksraster einpassen.

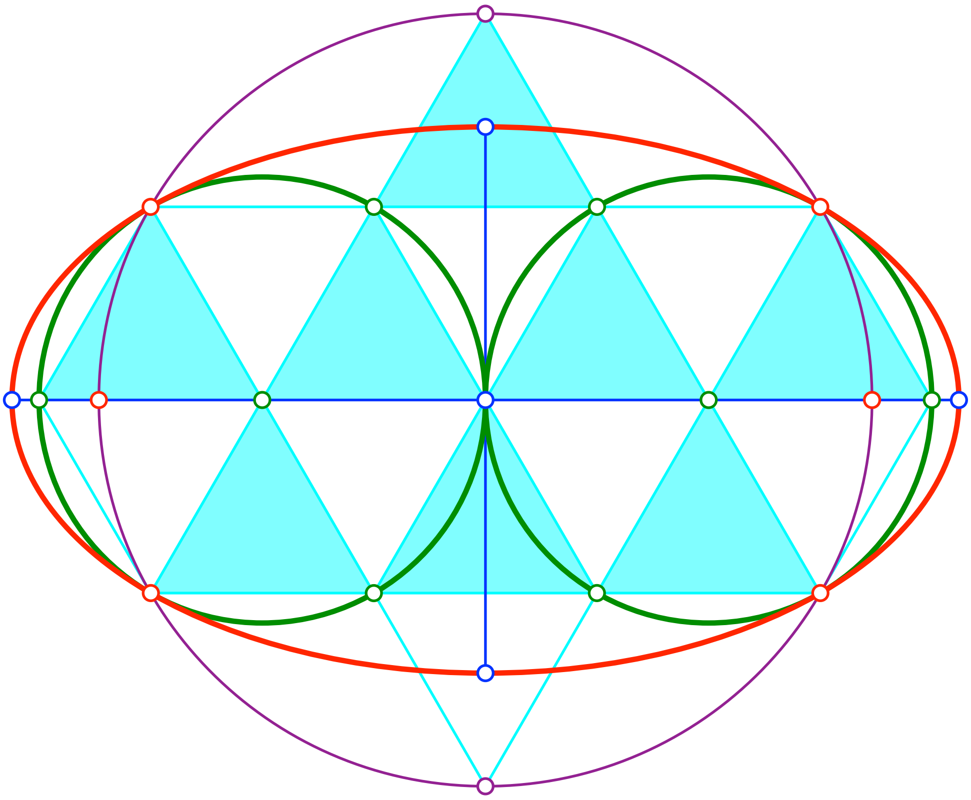

Abb. 5: Minimallösung

In der Abbildung 6 ist zusätzlich ein schräges gelbes Rechteck eingezeichnet. Es hat genau den Flächeninhalt 3. Zudem finden wir Winkel von 45°.

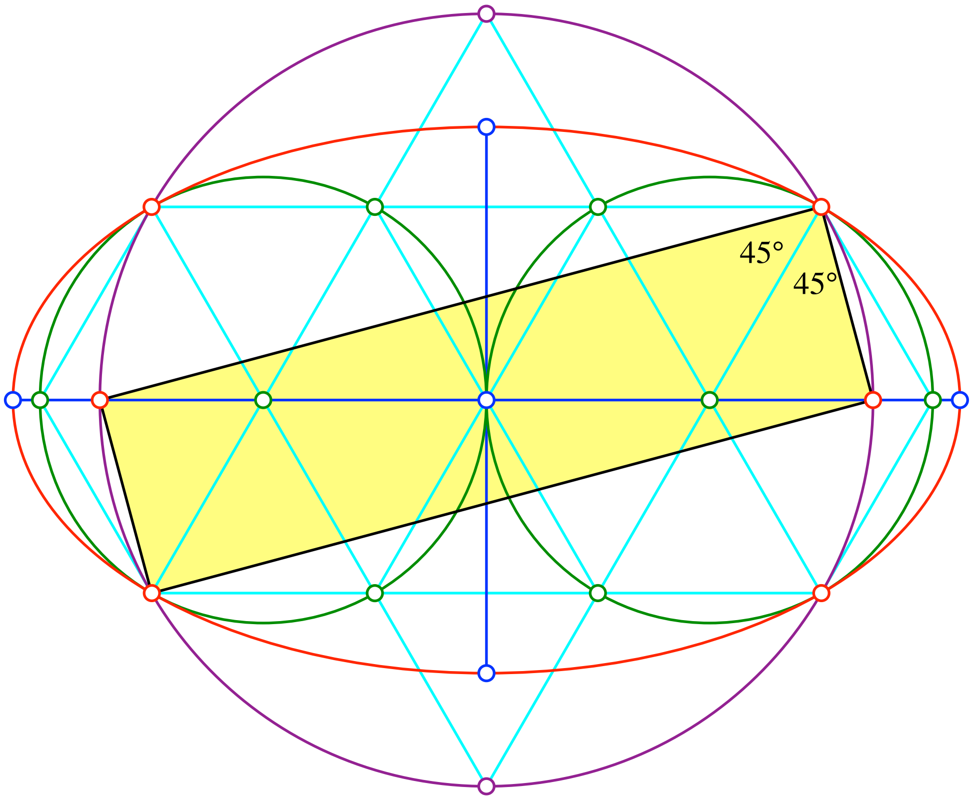

Abb. 6: Schräges Rechteck

4 Allgemeiner Fall

Die beiden gegebenen Kreise brauchen sich nicht zu berühren (Abb. 7). Die Minimallösung liefert dann allerdings keine „schönen“ Resultate.

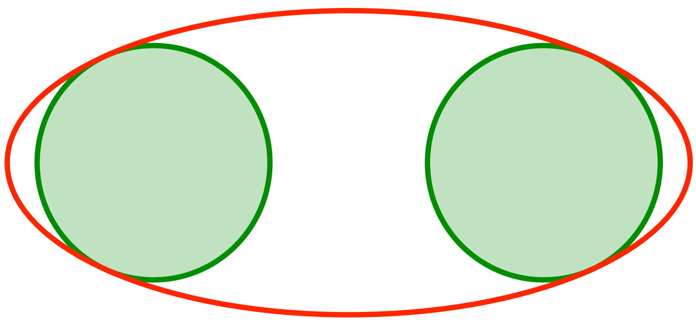

Abb. 7: Allgemeiner Fall

Weblinks

[1] Hans Walser, Dreiecksaufgabe (15.07.2018):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Dreiecksaufgabe/Dreiecksaufgabe.htm