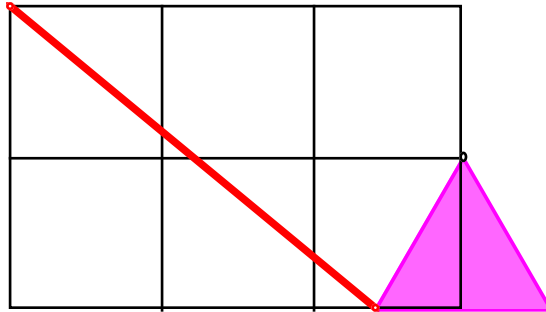


Hans Walser, [20070506b], [20131221]

## Näherungskonstruktionen für die Kreiszahl $\pi$

### 1 Quadratraster und gleichseitiges Dreieck

Wie lang ist die rote Strecke?



Wie lang ist die rote Strecke?

### Bearbeitung

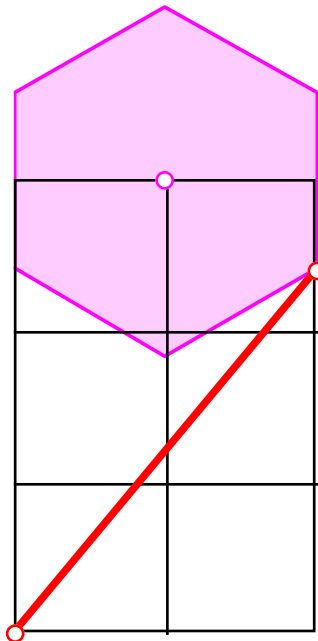
Wir setzen die Maschenweite des Quadratrasters gleich 1. Dann ist:

$$s = \sqrt{2^2 + (3 - \tan(30^\circ))^2} \approx 3.141533339$$

Diese Näherungskonstruktion der Kreiszahl  $\pi$  geht auf Adam Adamandy Kochanski (1631-1700) zurück. Sie wurde 1685 entwickelt.

### 2 Quadratraster und regelmäßiges Sechseck

Wie lang ist die rote Strecke?



Wie lang ist die rote Strecke?

**Bearbeitung**

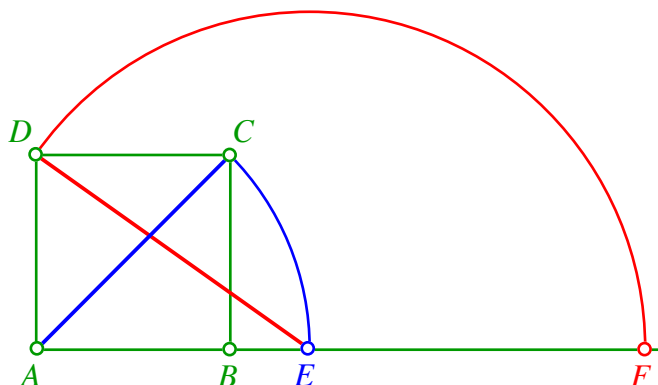
Wir setzen die Maschenweite des Quadratrasters gleich 1. Dann ist:

$$s = \sqrt{2^2 + (3 - \tan(30^\circ))^2} \approx 3.141533339$$

Diese Näherungskonstruktion der Kreiszahl  $\pi$  geht auf Adam Adamandy Kochanski (1631-1700) zurück. Sie wurde 1685 entwickelt.

**3 Näherungskonstruktion für die Kreiszahl  $\pi$** 

Wie gut ist die durch die Figur ange deutete Approximation der Kreiszahl  $\pi$ ?



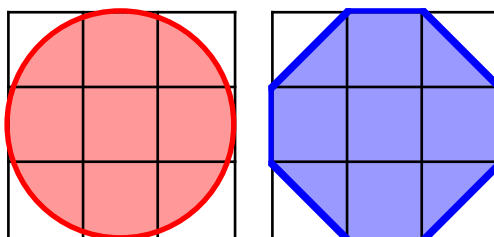
Approximation von  $\pi$

**Ergebnis**

$$\overline{AB} = 1 \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AE} = \sqrt{2} \Rightarrow \overline{ED} = \overline{EF} = \sqrt{3}$$

$$\overline{AF} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3.14626437$$

Die Zahl ist etwa 0.15% zu groß.

**4 Näherungskonstruktion mit Achteck**

Kreis und Achteck

- Wie unterscheiden sich die Kreisfläche und die Achteckfläche? Welchen Näherungswert erhalten wir für die Kreiszahl  $\pi$ , wenn wir die beiden Flächen gleichsetzen?
- Wie unterscheiden sich der Kreisumfang und der Achteckumfang? Welchen Näherungswert erhalten wir für die Kreiszahl  $\pi$ , wenn wir die beiden Umfänge gleichsetzen?

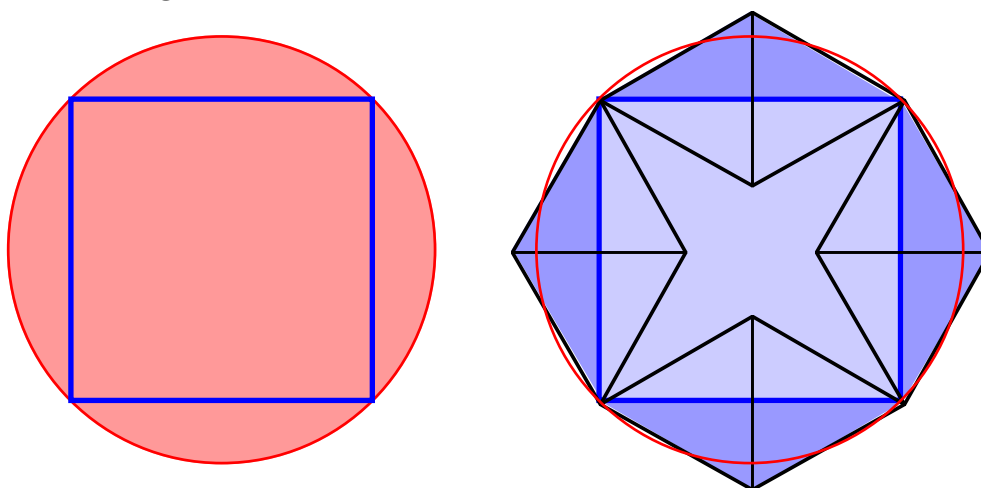
**Bearbeitung**

- a) Kreisfläche =  $1.5^2 \pi \approx 7.06858$  ; Achteckfläche = 7. Die Achtecksfläche ist um etwa ein Prozent kleiner als die Kreisfläche. Bei Gleichsetzen der beiden Flächen ergibt sich für die Kreiszahl  $\pi$  der Näherungswert:

$$\pi \approx \frac{7}{1.5^2} = 3.\bar{1}$$

- b) Kreisumfang =  $3\pi \approx 9.42477796$  ; Achteckumfang =  $4 + 4\sqrt{2} \approx 9.65685425$  Bei Gleichsetzen der beiden Umfänge ergibt sich für die Kreiszahl  $\pi$  der Näherungswert:

$$\pi \approx \frac{4+4\sqrt{2}}{3} \approx 3.21895$$

**5 Näherungskonstruktion mit Achteck****Kreis und Achteck**

Wir setzen an die Seiten eines Quadrates halbe gleichseitige Dreiecke an. Dadurch entsteht ein Achteck; dieses ist unregelmäßig. Es hat zwar gleich lange Seiten, aber die Winkel messen abwechslungsweise  $120^\circ$  und  $150^\circ$ .

- a) Wie unterscheiden sich die Gesamtfläche dieses Achteckes und die Fläche des Umkreises des Quadrates? Welchen Näherungswert erhalten wir für die Kreiszahl  $\pi$ , wenn wir die beiden Flächen gleichsetzen?
- b) Wie unterscheiden sich der Kreisumfang und der Achteckumfang? Welchen Näherungswert erhalten wir für die Kreiszahl  $\pi$ , wenn wir die beiden Umfänge gleichsetzen?

**Bearbeitung**

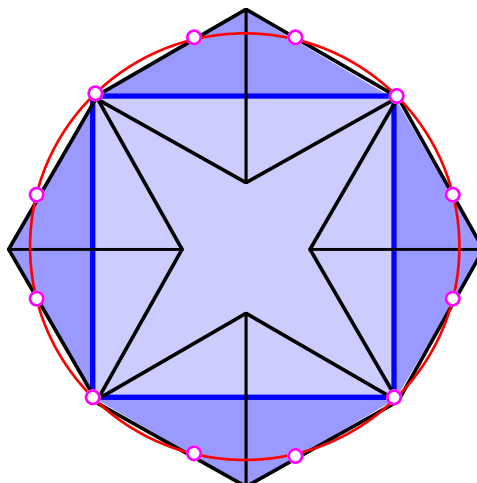
- a) Kreisfläche =  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{2} \approx 1.570796$ ; Achteckfläche =  $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1.577350$ . Die Achteckfläche ist etwa 0.4% größer als die Kreisfläche. Bei Gleichsetzen der beiden Flächen ergibt sich für die Kreiszahl  $\pi$  der Näherungswert:

$$\pi \approx \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 3.1547$$

- b) Kreisumfang =  $\sqrt{2}\pi \approx 4.442883$ ; Achteckumfang =  $8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 4.618802$  Bei Gleichsetzen der beiden Umfänge ergibt sich für die Kreiszahl  $\pi$  der Näherungswert:

$$\pi \approx \frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} \approx 3.265986$$

Bemerkung: Die Schnittpunkte des Achteckes mit dem Umkreis des Quadrates bilden ein regelmäßiges Zwölfeck.



**Regelmäßiges Zwölfeck**