Hans Walser, [20191210]

Negative Dimensionen

Anregung: Z. D., W.

1 Worum geht es?

Anlässlich eine Workshops mit Schülerinnen und Schülern über hyperdimensionale Würfel wurde die Frage gestellt, ob es auch einen Hyperwürfel der Dimension –1 gebe.

2 Ähnlichkeits-Dimension

2.1 Definition

Wir verwenden folgenden Dimensions-Begriff:

Fguren, die aus N mit dem Ähnlichkeitsfaktor r vergrößerten oder verkleinerten Kopien ihrer selbst bestehen, heißen selbstähnlich.

Für diese Figuren gilt die Ähnlichkeitsdimension D:

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = -\frac{\log(N)}{\log(r)} \tag{1}$$

2.2 Beispiel

Bei einem Quadrat erhalten wir für $r = \frac{1}{2}$ insgesamt $N = 4$ Kopien (Abb. 1).

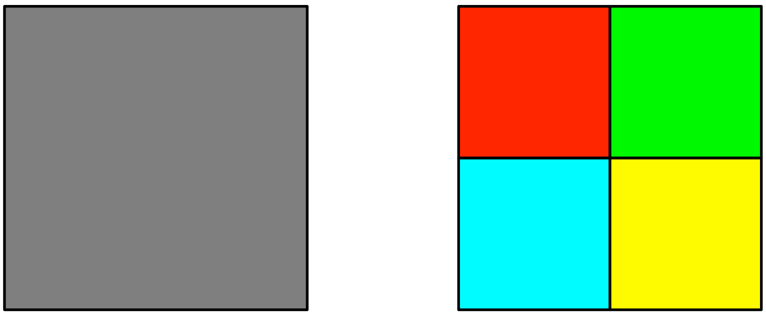


Abb. 1: Quadrat und vier Kopien

Nach (1) ergibt sich die Dimension D:

$$D = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\log_2(4)}{\log_2(2)} = \frac{2}{1} = 2 \tag{2}$$

Das Quadrat ist zweidimensional.

3 Punktfolge

3.1 Zwei Farben

Wir gehen aus von der unendlich langen Punktfolge der Abbildung 2a. Man kann sich darunter zum Beispiel die Menge der ganzen Zahlen auf dem Zahlenstrahl vorstellen.

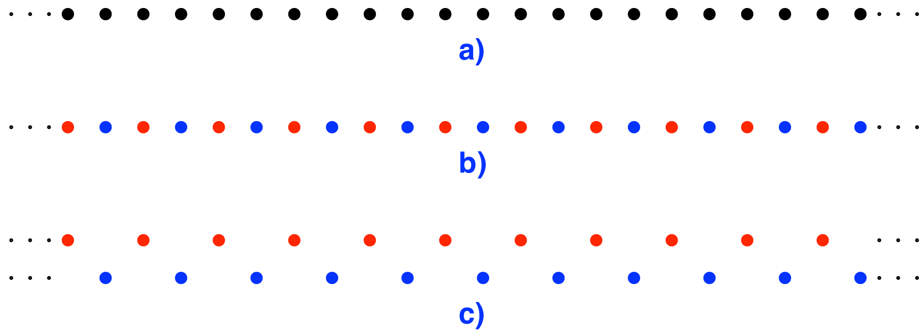


Abb. 2: Punktfolge

Nun färben wir die Punkte im Wechsel rot und blau (Abb. 2b). Man kann sich darunter die geraden beziehungsweise die ungeraden ganzen Zahlen vorstellen.

Wir erhalten so zwei Punktfolgen (Abb. 2c), welche aus der ursprünglichen Punktfolge durch eine Streckung mit dem Faktor 2 hervorgehen. Für die Berechnung der Ähnlichkeitsdimension D nach (1) ist also $N = 2$ und $r = 2$, und daher:

$$D = \frac{\log(2)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\log(2)}{\log(2)} = -1 \tag{3}$$

Die Punktfolge hat die negative Dimension -1.

3.2 Drei Farben

Wir können auch mit drei Farben arbeiten (Abb. 3).

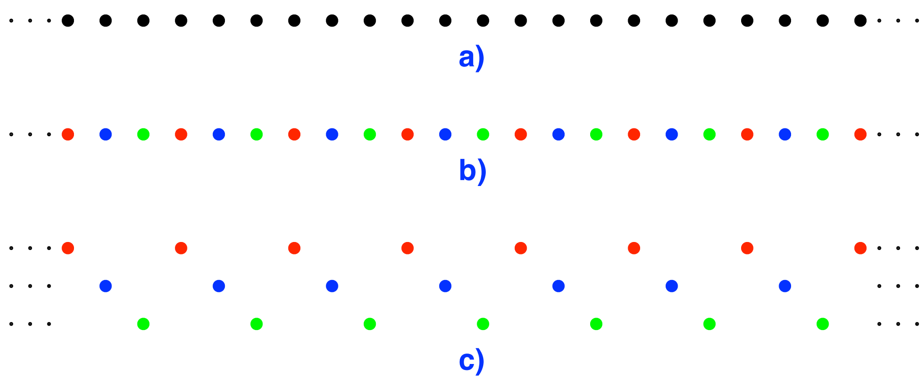


Abb. 3: Drei Farben

Zahlentheoretisch sind das die Restklassen modulo 3.
Für die Dimensionsberechnung nach (1) ist $N = 3$ und $r = 3$ und daher:

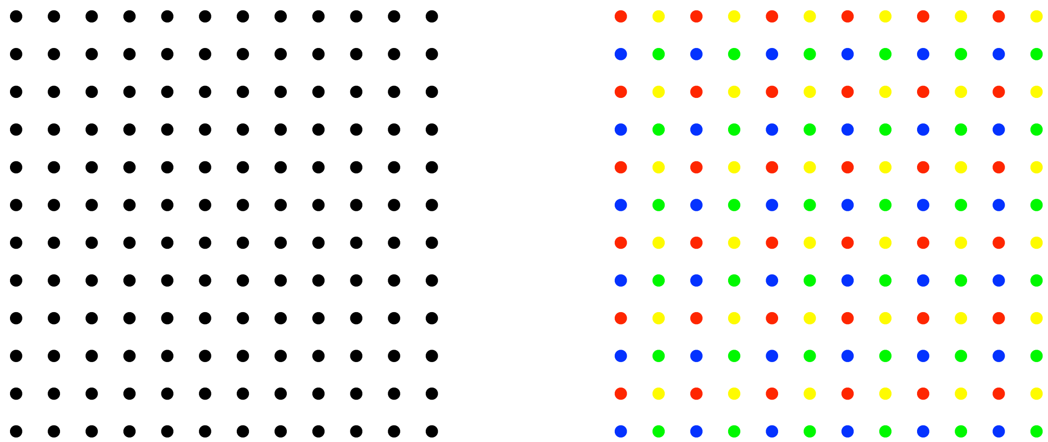
$$D = \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = -\frac{\log(3)}{\log(3)} = -1 \qquad (4)$$

Wir erhalten wiederum die Dimension –1.

4 Gitterpunkte in der Ebene

4.1 Vier Farben

Wir beginnen mit den Gitterpunkten eines unendlich groß gedachten Quadratgitters (Abb. 4a).



a) b)

Abb. 4: Gitterpunkte

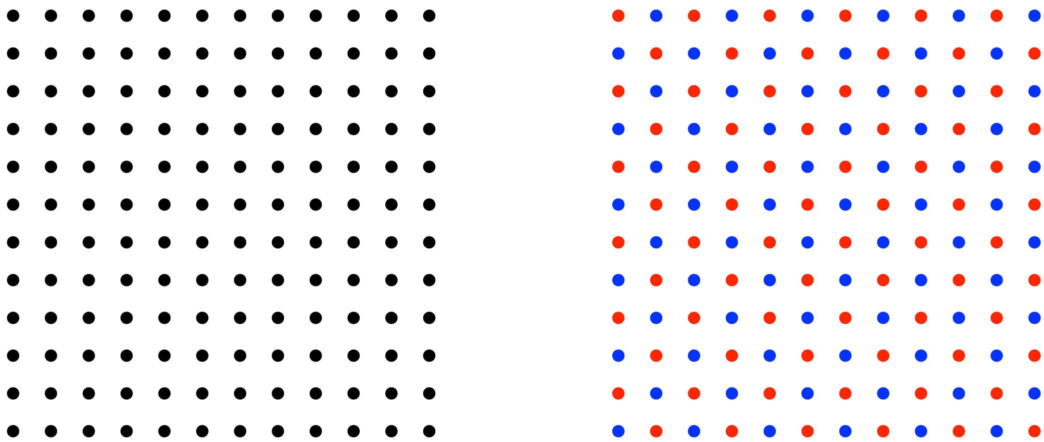
Wir können mit vier Farben so färben, dass wir vier Punktgitter erhalten, die zum Ausgangspunktgitter ähnlich sind mit dem Streckfaktor 2. Es ist also $N = 4$ und $r = 2$ und daher:

$$D = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\log_2(4)}{\log_2(2)} = -\frac{2}{1} = -2 \qquad (5)$$

Wir erhalten die Ähnlichkeitsdimension –2.

4.2 Zwei Farben

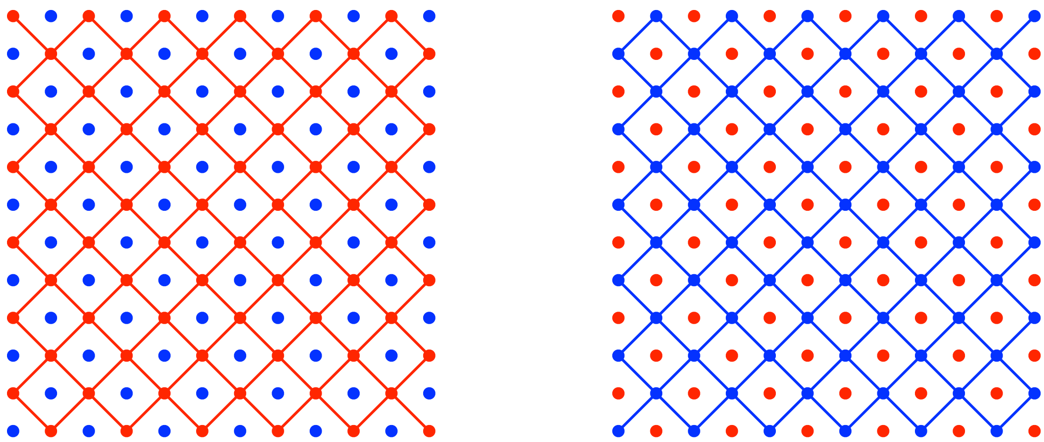
Die Abbildung 5b zeigt eine Färbung mit nur zwei Farben, im Wechsel rot und blau.



a) b)

Abb. 5: Zwei Farben

Wir erkennen zwei diagonale Punktgitter (Abb. 6).



a) b)

Abb. 6: Diagonale Punktgitter

Die beiden Punktgitter sind gegenüber dem Original (Abb. 5a) um ±45° gedreht und mit dem Faktor $r = \sqrt{2}$ gestreckt und damit zu diesem ähnlich.
Für die Ähnlichkeitsdimension erhalten wir:

$$D=\frac{\log(2)}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\log_2(2)}{\log_2\left(\sqrt{2}\right)}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2 \qquad (6)$$

Wir haben nach wie vor die Ähnlichkeitsdimension –2.

4.3 Fünf Farben

In der Abbildung 7b wurden fünf Farben verwendet.

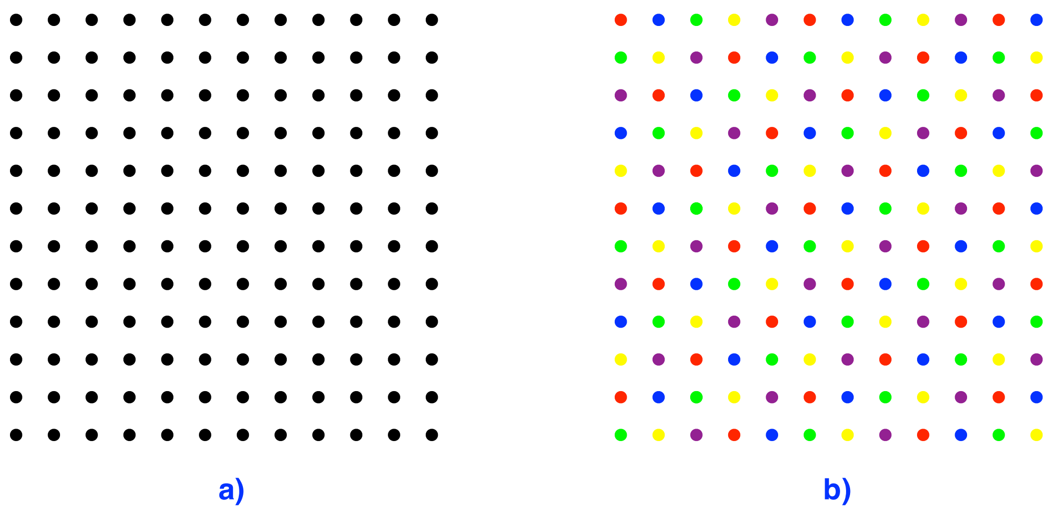


Abb. 7: Fünf Farben

Wir erkennen fünf schräge Quadratraster. In der Abbildung 8 sind zwei der fünf schrägen Quadratraster eingezeichnet.

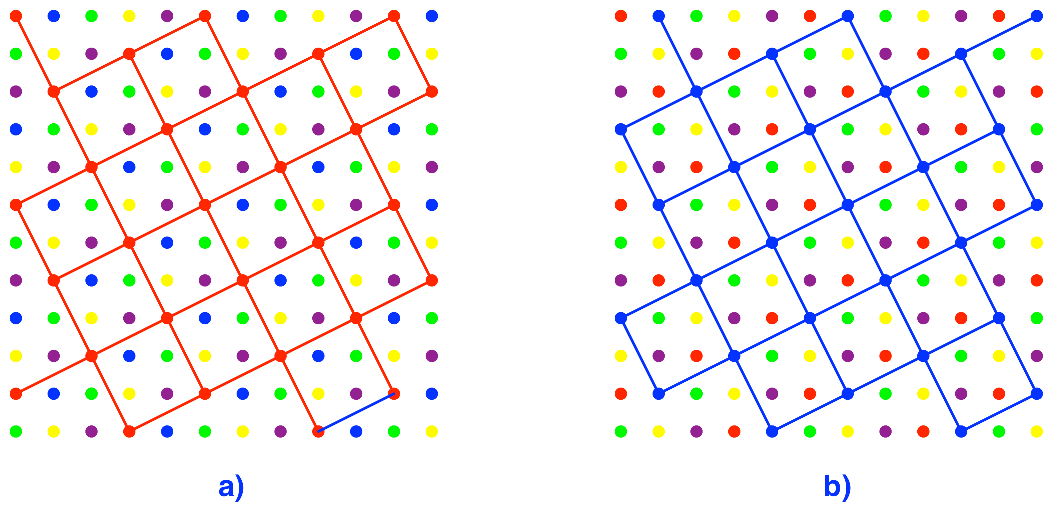


Abb. 8: Schräge Quadratraster

Die schrägen Raster sind zueinander parallel und haben die Maschenweite $\sqrt{5}$. Die zugehörigen Gitter gehen daher aus dem Originalgitter durch eine Drehstreckung mit dem Streckfaktor $\sqrt{5}$ hervor. Der Drehwinkel ist $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26.57°$. Für die Ähnlichkeitsdimension finden wir:

$$D = \frac{\log(5)}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = -\frac{\log_5(5)}{\log_5\left(\sqrt{5}\right)} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2 \qquad (7)$$

Man sieht, wie der Hase läuft.

5 Allgemein

Die Menge der Gitterpunkte eines n-d-Hyperwürfelgitters hat die Ähnlichkeitsdimension $D = -n$.

6 Ausblick und Frage

Die Fraktale haben positive, aber in der Regel nicht ganzzahlige (meist sogar irrationale) Ähnlichkeitsdimensionen. Gibt es Entsprechendes im negativen Bereich?

Websites

Wikipedia: Fraktale Dimension (10.12.2019)
https://de.wikipedia.org/wiki/Fraktale_Dimension