Hans Walser, [20090517a]

Newton-Raphson in der Ebene

1 Worum es geht

Die Nullstellen einer Funktion $y(x)$ können nach dem Verfahren von Newton-Raphson bestimmt werden: Wir wählen einen Startwert x_0. Dann arbeiten wir mit der Rekursionsformel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y(x_n)}{y'(x_n)}$$

Hoffnung: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n =$ exakte Nullstelle

Wir übertragen nun dieses Verfahren auf die Situation:

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}$$

Wir haben also zwei Funktionen von denselben zwei Variablen. Gesucht sind x und y so, dass beide Funktionen verschwinden.

2 Schreibweise

Wir verwenden die folgende Schreibweise:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$U(X) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Ferner verwenden wir die 2,2-Matrix der partiellen Ableitungen:

$$U'(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Unter $U'^{-1}(X)$ verstehen wir die zu $U'(X)$ inverse Matrix.

3 Das Verfahren von Newton-Raphson

Wir wählen einen Startwert X_0 und verwenden die Rekursionsformel:

$$\boxed{X_{n+1} = X_n - U'^{-1}(X_n)U(X_n)}$$

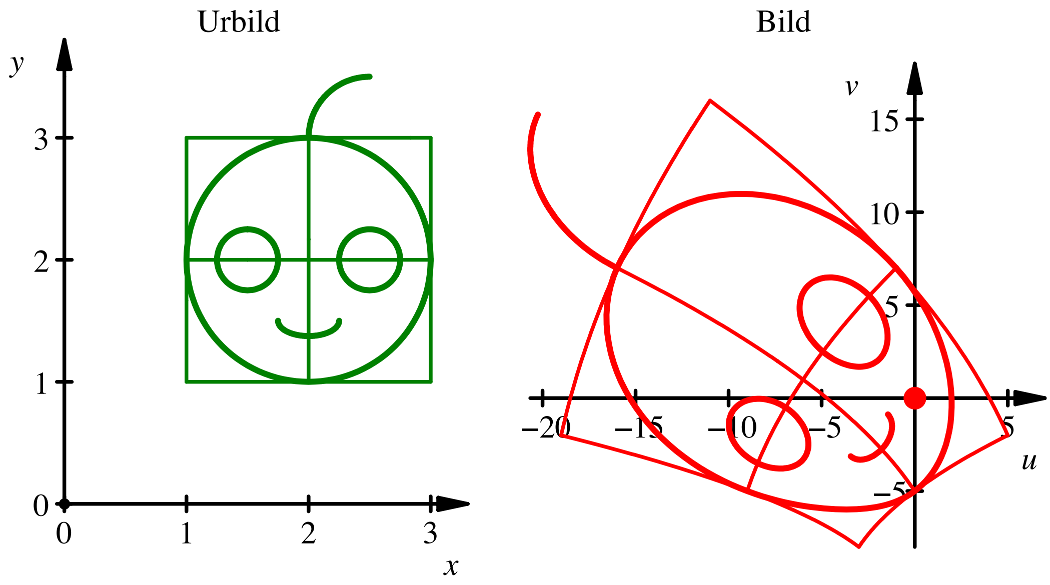
Die Formel ist völlig analog zum eindimensionalen Fall. Sie ist auf beliebige Dimensionen übertragbar.

4 Beispiel

Wir arbeiten mit den Funktionen:

$$u = u(x,y) = x^2 - 2y^2 - 2$$
$$v = v(x,y) = 3xy - 11$$

Wir fassen diese Gleichungen als Abbildungsgleichungen auf. Dabei wird der grüne Kopf in der *x,y*-Ebene auf den roten Kopf in der *u,v*-Ebene abgebildet.



Abbildung

Wir sehen weiter, dass sich der Nullpunkt im roten Bild auf der linken Backe befindet. Im grünen Urbild hat der entsprechende Punkt die geschätzten Koordinaten $(\sim 2.5, \sim 1.5)$. Gesucht sind genauere Koordinaten dieser Nullstelle.

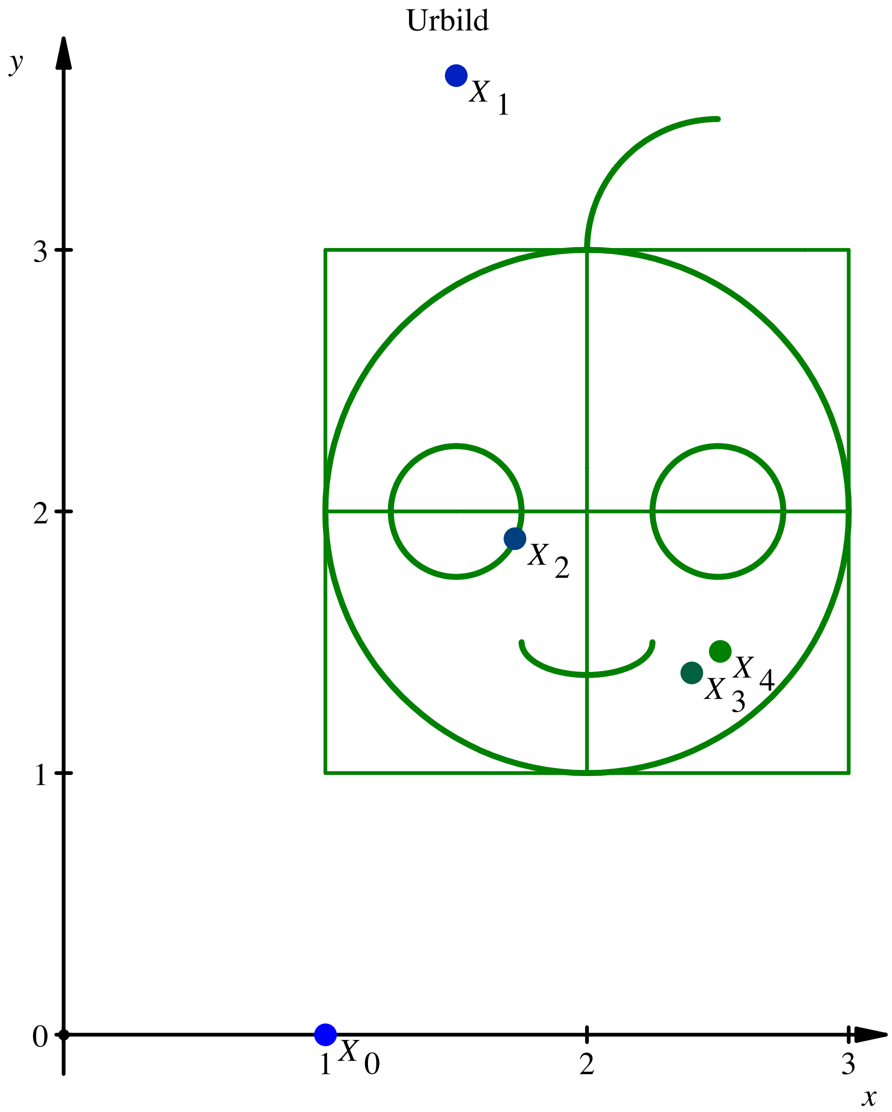
4.1 Startwert (1, 0)

Das Verfahren von Newton-Raphson liefert mit dem Startwert $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Tabelle:

Schritt n	x-Wert	y-Wert
0	1	0
1	1.5	3.666666667
2	1.724261201	1.896250397
3	2.399828632	1.383561641
4	2.508465442	1.465255017
5	2.506191815	1.463045114
6	2.506190969	1.463043604
7	2.506190969	1.463043604

Die Nullstelle ist also $X \approx \begin{pmatrix} 2.506190969 \\ 1.463043604 \end{pmatrix}$. Die Konvergenz ist wie immer bei Newton-Raphson recht schnell.

In der folgenden Figur sind zu den Schritten 0 bis 4 die zugehörigen Punkte X_n eingezeichnet.



Approximation der Nullstelle

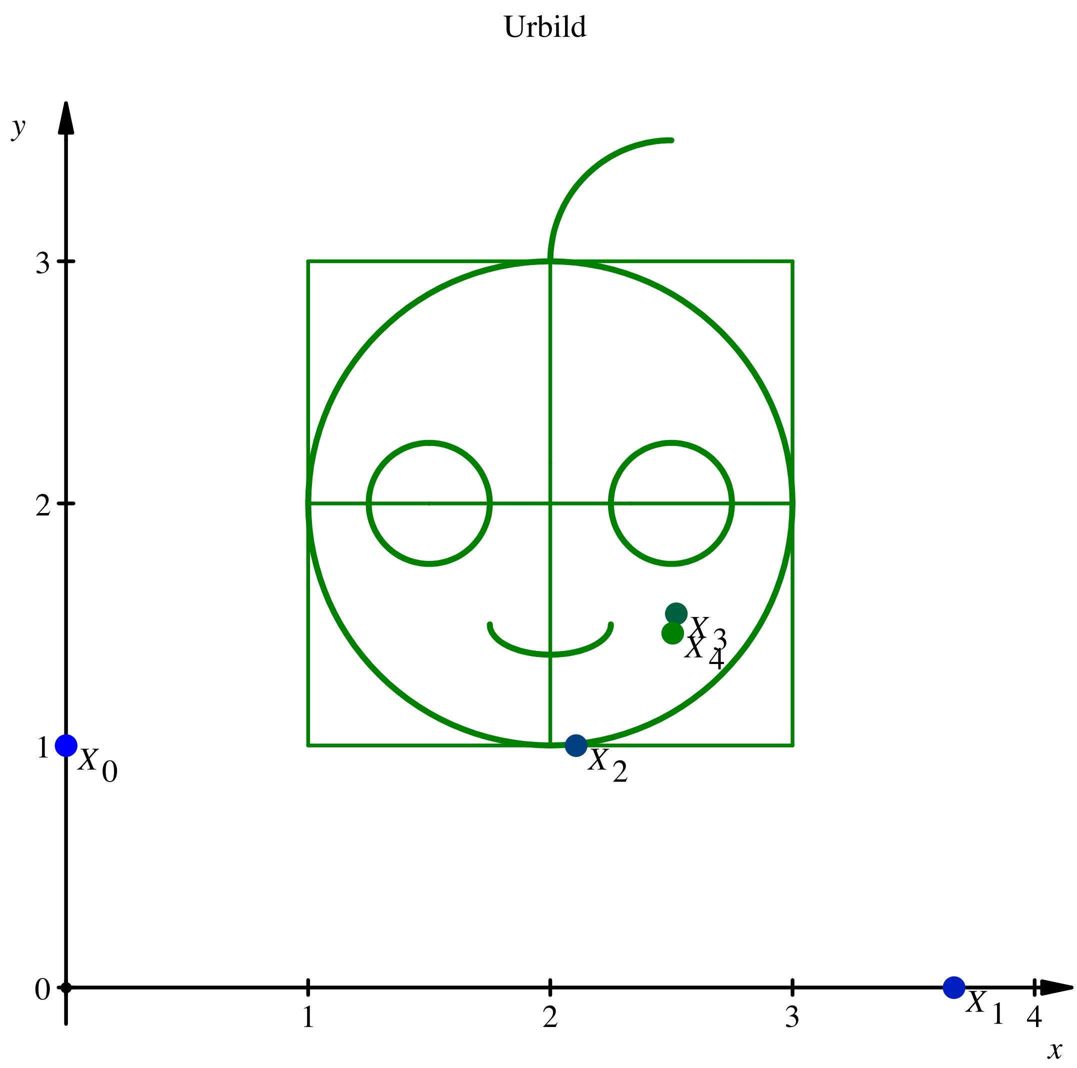
4.2 Anderer Startwert

Das Verfahren von Newton-Raphson liefert mit dem geänderten Startwert $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Tabelle:

Schritt n	x-Wert	y-Wert
0	0	1
1	3.666666667	0
2	2.106060606	1.0
3	2.519801608	1.544554632
4	2.505014678	1.46420491
5	2.506190434	1.463043371
6	2.506190969	1.463043604
7	2.506190969	1.463043604

Wir kommen zur selben Nullstelle.

In der folgenden Figur sind wieder zu den Schritten 0 bis 4 die zugehörigen Punkte X_n eingezeichnet.



Anderer Weg zur gleichen Nullstelle

5 Kontrolle

Für das Gleichungssystem

$$u(x,y) = x^2 - 2y^2 - 2 = 0$$
$$v(x,y) = 3xy - 11 = 0$$

liefert MuPAD:

```
u:=(x,y)->x^2-2*y^2-2:
v:=(x,y)->3*x*y-11:
glgs:={u(x,y)=0, v(x,y)=0}:
sols:=float(solve(glgs, {x, y})):
print(sols):
```

die Lösungen:

```
{[x = -2.506190969, y = -1.463043604],
[x = 2.506190969, y = 1.463043604],
[x = -2.069056107 I, y = 1.772144629 I],
[x = 2.069056107 I, y = -1.772144629 I]}
```