Hans Walser, [20090602a]

Ewige Paarläufe

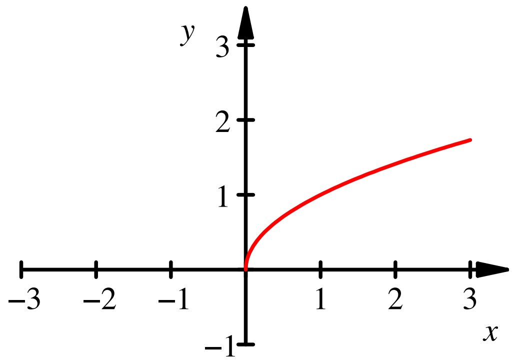
1 Worum es geht

Es werden Beispiele vorgestellt, bei denen durch die Anwendung des Verfahrens von Newton-Raphson ein ewiger Paarlauf zwischen zwei Werten entstehen.

2 Wurzelfunktionen

2.1 Das einfache Beispiel

Die Funktion $y = f(x) = \sqrt{x}$ ist nur für $x \geq 0$ definiert. Sie hat die Nullstelle 0.



Funktionsgraf

Was geschieht, wenn wir versuchen, mit dem Verfahren von Newton-Raphson und dem Startwert $x_0 = 2$ eine Nullstelle zu bestimmen?

Mit dem MuPAD-Programm

```
f:=x->sqrt(x):
x[0]:=2:
N:=5:
for n from 0 to N do
 x[n+1]:=(x[n]-f(x[n])/f'(x[n])):
end_for:
for n from 0 to N do
   print(Unquoted,"  x[".n."]\t= ".x[n]);
end_for:
```

erhalten wir:

```
  x[0]  = 2
  x[1]  = -2
  x[2]  = 2
  x[3]  = -2
  x[4]  = 2
  x[5]  = -2
```

Die Werte pendeln zwischen 2 und -2. Das ist völliger Unsinn, denn der Wert $x_1 = -2$ ist *nicht* im Definitionsbereich der Funktion und kann daher nicht weiter verarbeitet werden.

Für einen beliebigen Startwert $x_0 = a \neq 0$ pendeln die Werte zwischen a und $-a$.

Beweis:

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt{x_n}}{\frac{1}{2\sqrt{x_n}}} = x_n - 2x_n = -x_n$$

Wir sehen, dass die für $|x| < 0$ rein imaginäre Zahl $\sqrt{x}$ durch das Quadrieren wieder reell wird.

2.2 Das subtile Beispiel

Die Funktion $y = f(x) = \sqrt{-|x|}$ ist nur für $x = 0$ definiert, das ist dann auch die Nullstelle.

Was geschieht, wenn wir wieder versuchen, mit dem Verfahren von Newton-Raphson und dem Startwert $x_0 = 2$ eine Nullstelle zu bestimmen?

Wir erhalten erneut:

```
x[0]  = 2
x[1]  = -2
x[2]  = 2
x[3]  = -2
x[4]  = 2
x[5]  = -2
```

Beide Werte sind aber nicht im Definitionsbereich der Funktion.

Für einen beliebigen Startwert $x_0 = a \neq 0$ pendeln die Werte zwischen a und $-a$.

Beweis: Für $x \neq 0$ gilt:

$$f(x) = \sqrt{-|x|}$$
$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sgn}(x)}{2\sqrt{-|x|}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{-|x_n|}}{\frac{-\operatorname{sgn}(x_n)}{2\sqrt{-|x_n|}}} = x_n + 2\underbrace{\operatorname{sgn}(x_n)(-|x_n|)}_{=-x_n} = -x_n$$

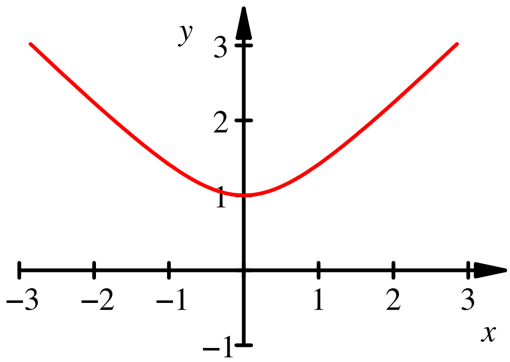
3 Variation der Vorzeichen

Wir untersuchen die vier Funktionen:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$f(x) = \sqrt{-1+x^2}$$
$$f(x) = \sqrt{-1-x^2}$$

3.1.1 plus plus

Die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.



Funktionsgraf

Der Funktionsgraf ist ein Hyperbelast. Die Funktion hat keine Nullstellen.

Das Verfahren von Newton-Raphson ergibt mit dem Startwert $x_0 = 2$:

```
x[0]  = 2
x[1]  = -1/2
x[2]  = 2
x[3]  = -1/2
x[4]  = 2
x[5]  = -1/2
```

Für einen beliebigen Startwert $x_0 = a \neq 0$ pendeln die Werte zwischen a und $-\frac{1}{a}$.

Beweis:

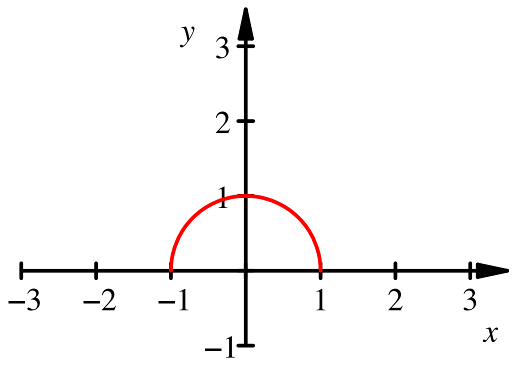
$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{1+x_n^2}}{\frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}} = x_n - \frac{1+x_n^2}{x_n} = -\frac{1}{x_n}$$

3.1.2 plus minus

Die Funktion $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ist auf $[-1,1]$ definiert.



Funktionsgraf

Der Funktionsgraf ist der obere Halbkreis des Einheitskreises. Die Funktion hat die Nullstellen ± 1.

Das Verfahren von Newton-Raphson ergibt mit dem Startwert $x_0 = 2$:

```
x[0]  = 2
x[1]  = 1/2
x[2]  = 2
x[3]  = 1/2
x[4]  = 2
x[5]  = 1/2
```

Für einen beliebigen Startwert $x_0 = a \neq 0$ pendeln die Werte zwischen a und $\frac{1}{a}$.

Beweis:

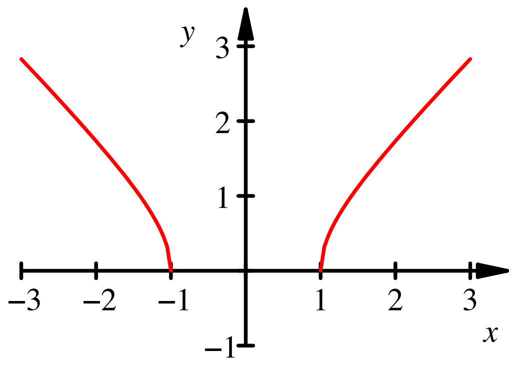
$$f(x)=\sqrt{1-x^2} \qquad f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{1-x_n^2}}{\frac{-x_n}{\sqrt{1-x_n^2}}} = x_n + \frac{1-x_n^2}{x_n} = \frac{1}{x_n}$$

3.1.3 minus plus

Die Funktion $f(x) = \sqrt{-1 + x^2}$ ist auf $\mathbb{R} - (-1, 1)$ definiert.



Funktionsgraf

Der Funktionsgraf ist eine halbe Hyperbel. Die Funktion hat die Nullstellen ± 1.
Das Verfahren von Newton-Raphson ergibt mit dem Startwert $x_0 = 2$:

```
x[0]  = 2
x[1]  = 1/2
x[2]  = 2
x[3]  = 1/2
x[4]  = 2
x[5]  = 1/2
```

Für einen beliebigen Startwert $x_0 = a \neq 0$ pendeln die Werte zwischen a und $\frac{1}{a}$.

Beweis:

$$f(x) = \sqrt{-1 + x^2} \qquad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{-1+x^2}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{-1+x_n^2}}{\frac{x_n}{\sqrt{-1+x_n^2}}} = x_n - \frac{-1+x_n^2}{x_n} = \frac{1}{x_n}$$

3.2 minus minus

Die Funktion $f(x) = \sqrt{-1 - x^2}$ ist für reelle Werte nicht definiert.

Das Verfahren von Newton-Raphson ergibt aber mit dem Startwert $x_0 = 2$:

```
x[0]  = 2
x[1]  = -1/2
x[2]  = 2
x[3]  = -1/2
x[4]  = 2
x[5]  = -1/2
```

Für einen beliebigen Startwert $x_0 = a \neq 0$ pendeln die Werte zwischen a und $-\frac{1}{a}$.

Beweis:

$$f(x) = \sqrt{-1 - x^2} \qquad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{-1-x^2}}$$

Damit erhalten wir für die Rekursion nach Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{-1-x_n^2}}{\frac{-x_n}{\sqrt{-1-x_n^2}}} = x_n + \frac{-1-x_n^2}{x_n} = -\frac{1}{x_n}$$