Hans Walser, [20190729]

Nullstellen

1 Worum geht es?

Wir beschreiben eine Funktion mit einer merkwürdigen Nullstellenverteilung.
Die Funktion erscheint in [1].

2 Einstiegsbeispiel

Die Abbildung 1 gibt den Grafen der Funktion:

$$f(t) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{5} \sin(2kt\pi), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Da die Funktion periodisch mit der Periodenlänge 1 ist, genügt ein entsprechender Ausschnitt.

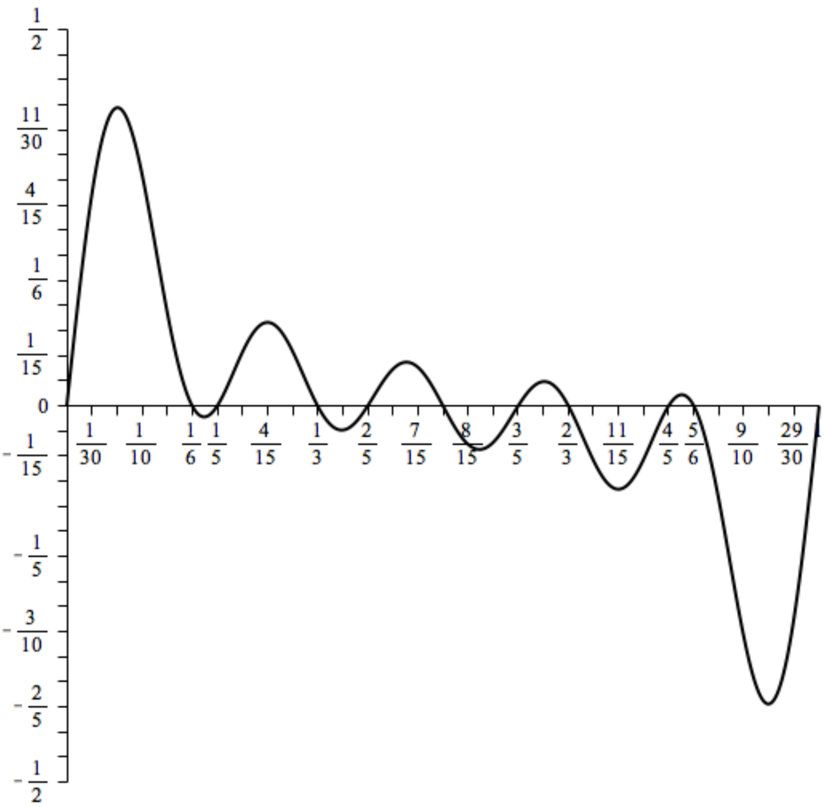

Abb. 1: Verteilung der Nullstellen?

Wir haben Nullstellen bei:

$$0, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1 \tag{1}$$

Wir können die Nullstellen aber in zwei Kategorien aufteilen:

$$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1 = \frac{5}{5} \quad \text{und} \quad 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} = \frac{2}{6}, \frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1 = \frac{6}{6} \tag{2}$$

Damit haben wir eine Struktur gefunden. Die Nullstellen sind entweder Vielfache von $\frac{1}{5}$ oder Vielfache von $\frac{1}{6}$. Die Abbildung 2 versucht, diesen Sachverhalt zu illustrieren.

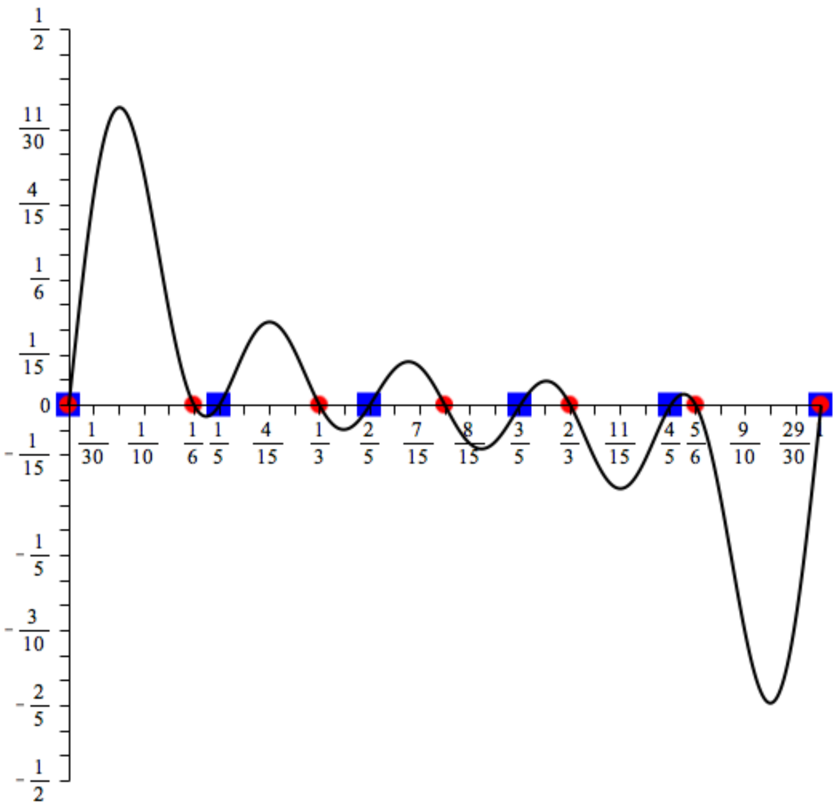

Abb. 2: Zwei Kategorien von Nullstellen

3 Beweisskizze

Wir wählen exemplarisch $t = \frac{3}{5}$. In den Sinusfunktionen von (1) haben wir dann die Eingabewerte $3k\frac{2\pi}{5}$. Die Abbildung 3 zeigt die Situation auf dem Einheitskreis. Die zugehörigen Sinuswerte annullieren sich.

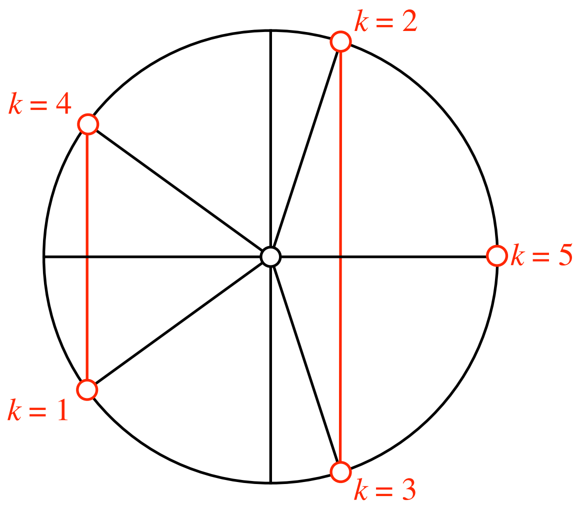

Abb. 3: *t* = 3/5

Für andere Vielfache von einem Fünftel geht die Überlegung analog.

Nun wählen wir $t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Die Abbildung 4 zeigt die Situation auf dem Einheitskreis.

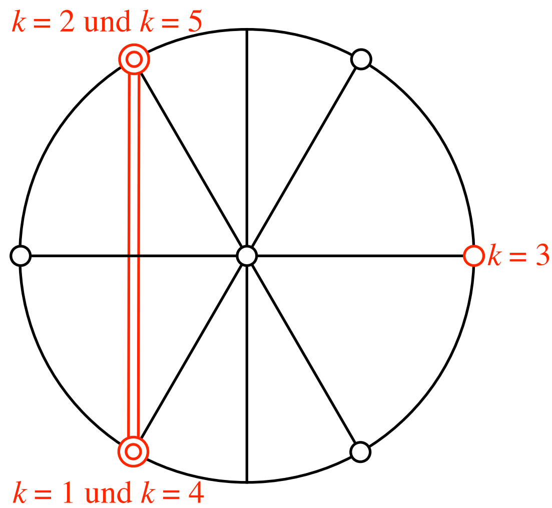

Abb. 4: *t* = 4/6

Die zugehörigen Sinuswerte annullieren sich. Das „Fehlen“ von $k = 6$ spielt keine Rolle.

Schließlich wählen wir $t = \frac{5}{6}$. Die Abbildung 5 zeigt die Situation auf dem Einheitskreis.

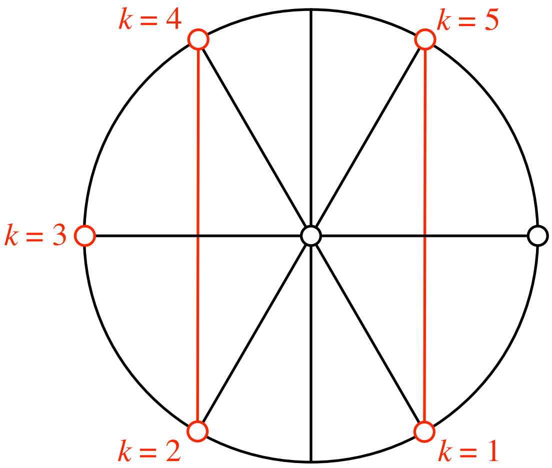

Abb. 5: t = 5/6

Wir haben wieder eine Annullierung der Sinuswerte. Das „Fehlen" von $k = 6$ spielt keine Rolle.
Analog für die restlichen Vielfachen von einem Sechstel.

4 Allgemein

Zu gegebenem n hat die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin(2kt\pi) \tag{3}$$

Nullstellen bei Vielfachen von $\frac{1}{n}$ und bei Vielfachen von $\frac{1}{n+1}$.

Der Koeffizient $\frac{1}{2n}$ dient nur dazu, die Darstellung zu vereinfachen. Auf die Nullstellen hat er keinen Einfluss.

5 Beispiele

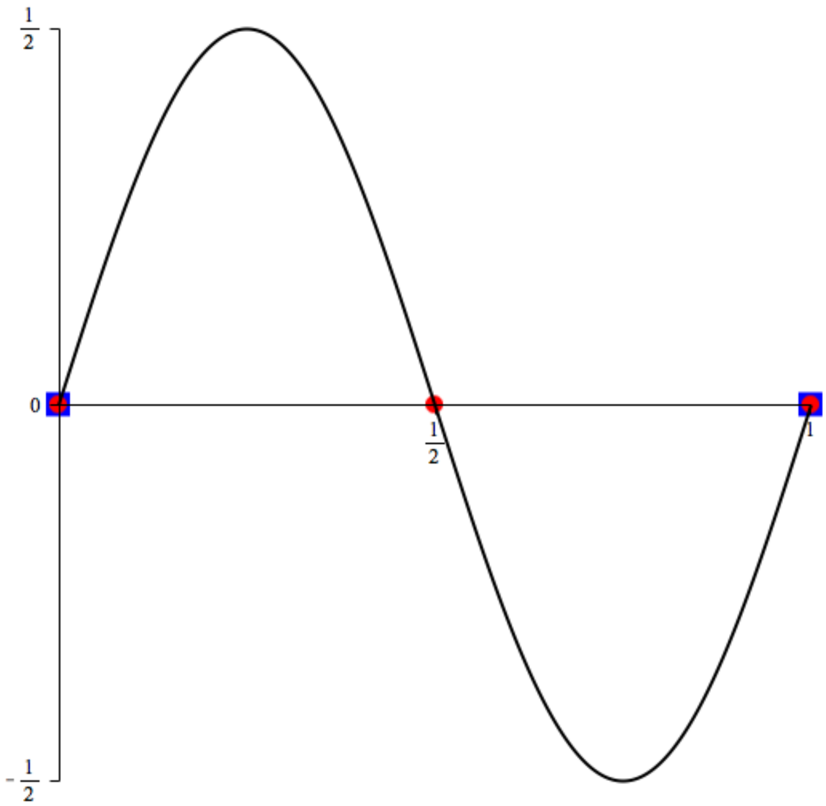

Abb. 6.1: *n* = 1

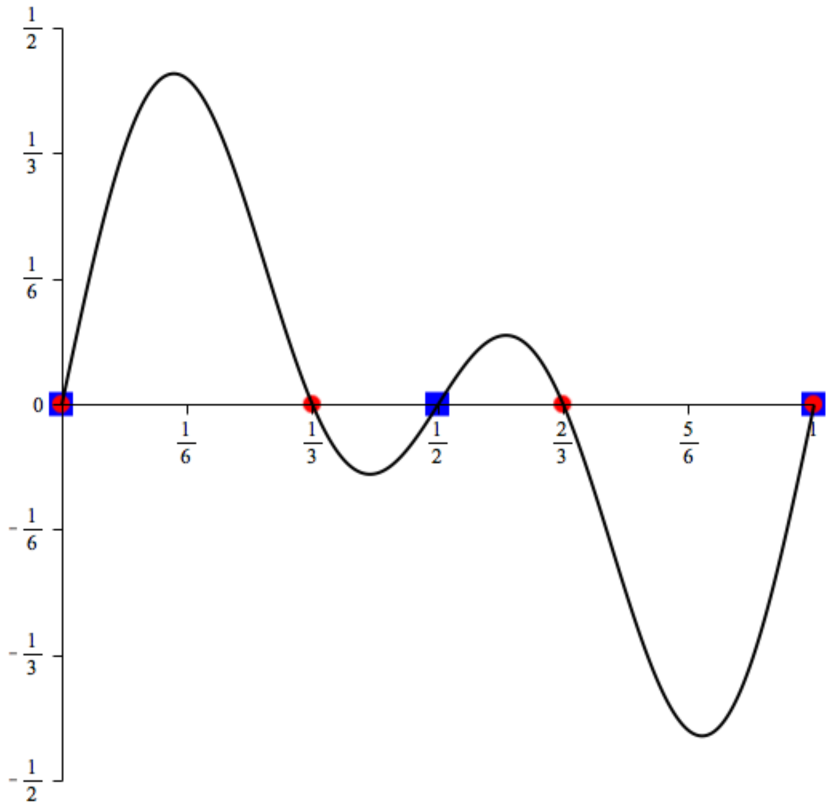

Abb. 6.2: n = 2

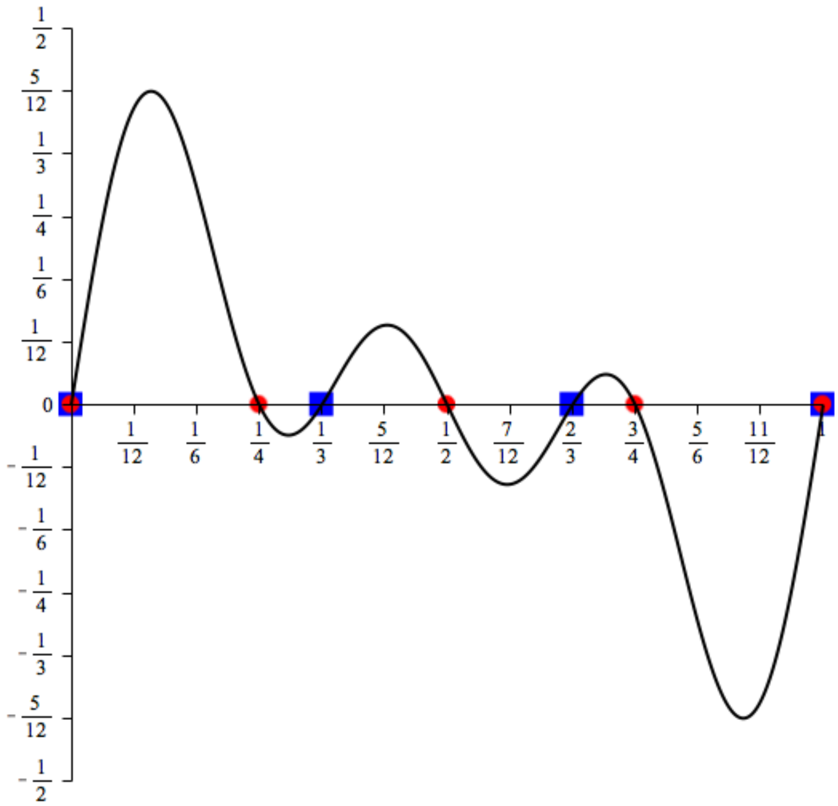
1/2
5/12
1/3
1/4
1/6
1/12
0
-1/12
-1/6
-1/4
-1/3
-5/12
-1/2
1/12
1/6
1/4
1/3
5/12
1/2
7/12
2/3
3/4
5/6
11/12
1

Abb. 6.3: *n* = 3

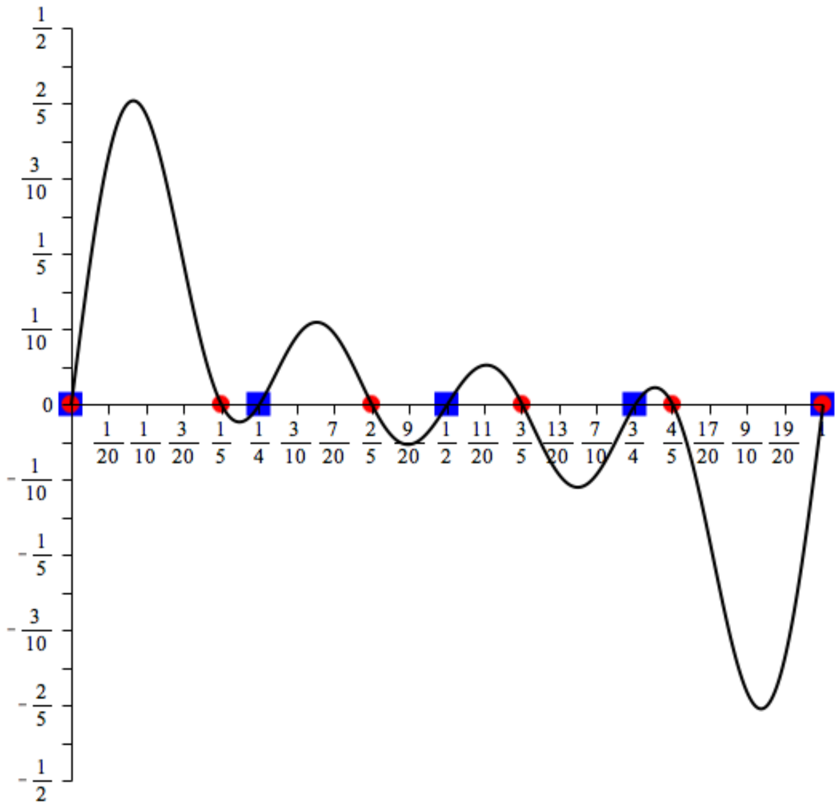

Abb. 6.4: *n* = 4

Website

[1] Hans Walser: Herzkurve
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Herzkurve5/Herzkurve5.htm