

Hans Walser, [20160427]

Nullsummen

1 Aufgabenstellungen

1.1 Roter Kranz

Einem Viereck mit gleich langen und orthogonalen Diagonalen setzen wir Quadrate an (rot in Abbildung 1).

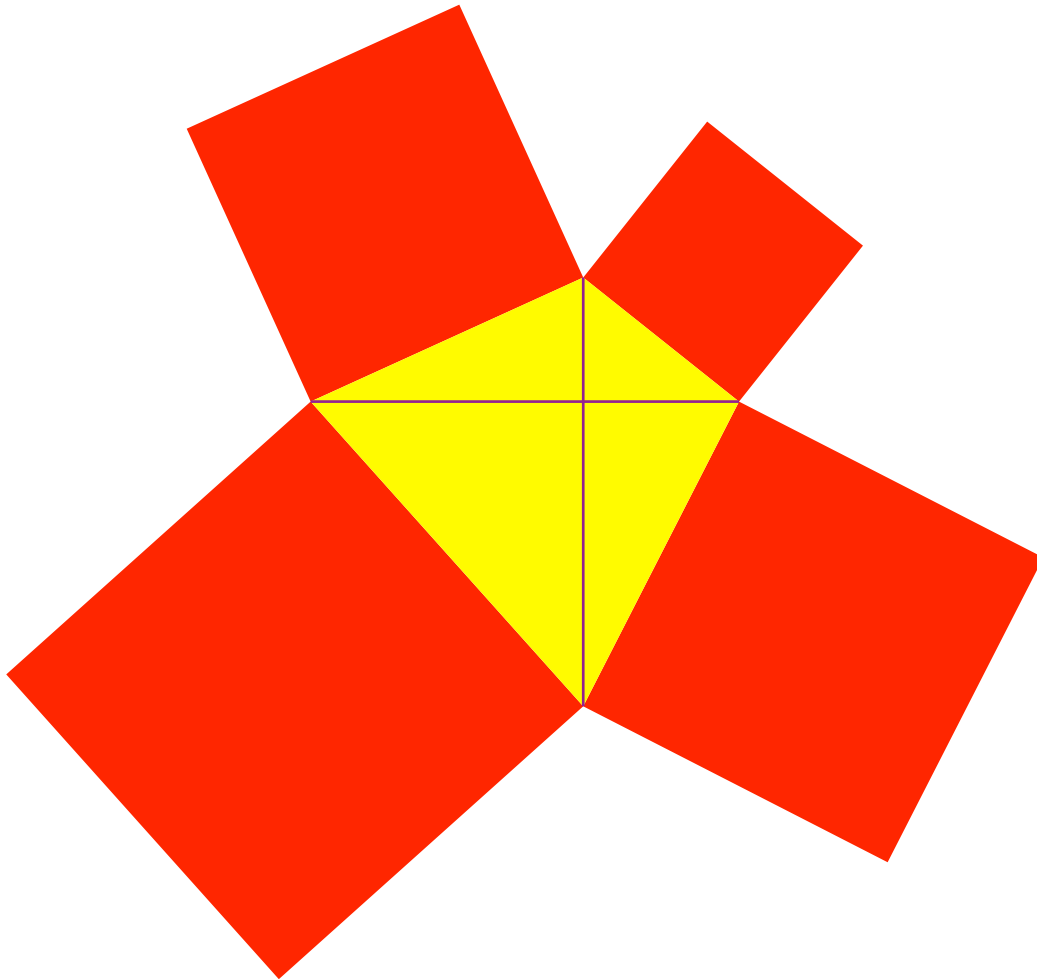


Abb. 1: Quadrate ansetzen

Wie groß ist die alternierende Flächensumme der vier roten Quadrate?

1.2 Grüner Kranz

Nun fügen wir einen weiteren Kranz von Quadraten dazu (grün in Abbildung 2).

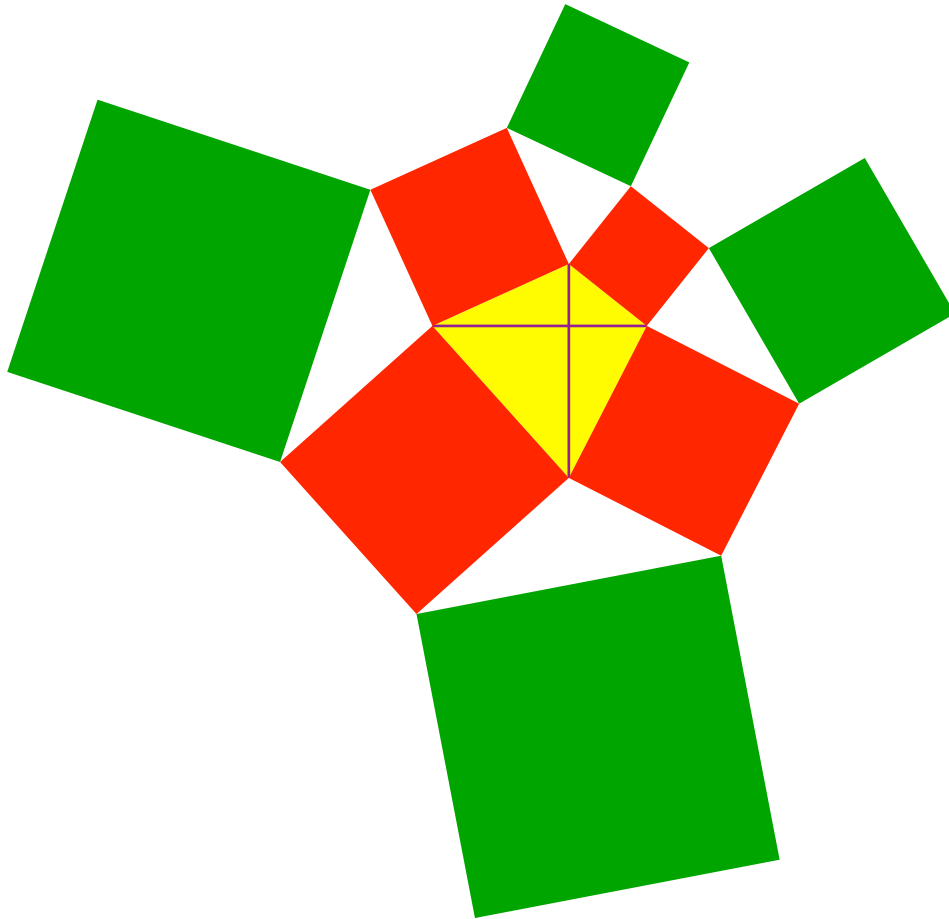


Abb. 2: Grüner Quadratkranz

Wie groß ist die alternierende Flächensumme der vier grünen Quadrate?

1.3 Blauer Kranz

Nun fügen wir einen weiteren Kranz von Quadraten dazu (blau in Abbildung 3).

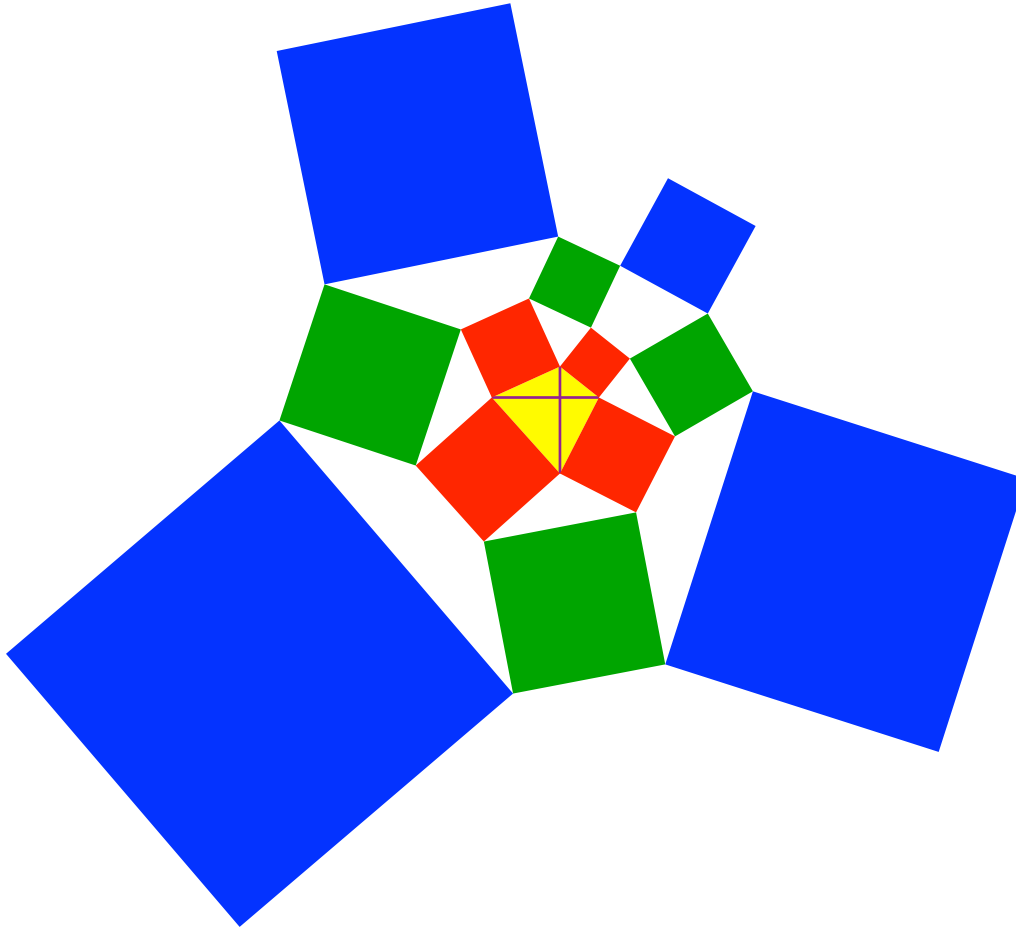


Abb. 3: Noch ein Kranz

Wie groß ist die alternierende Flächensumme der vier blauen Quadrate?

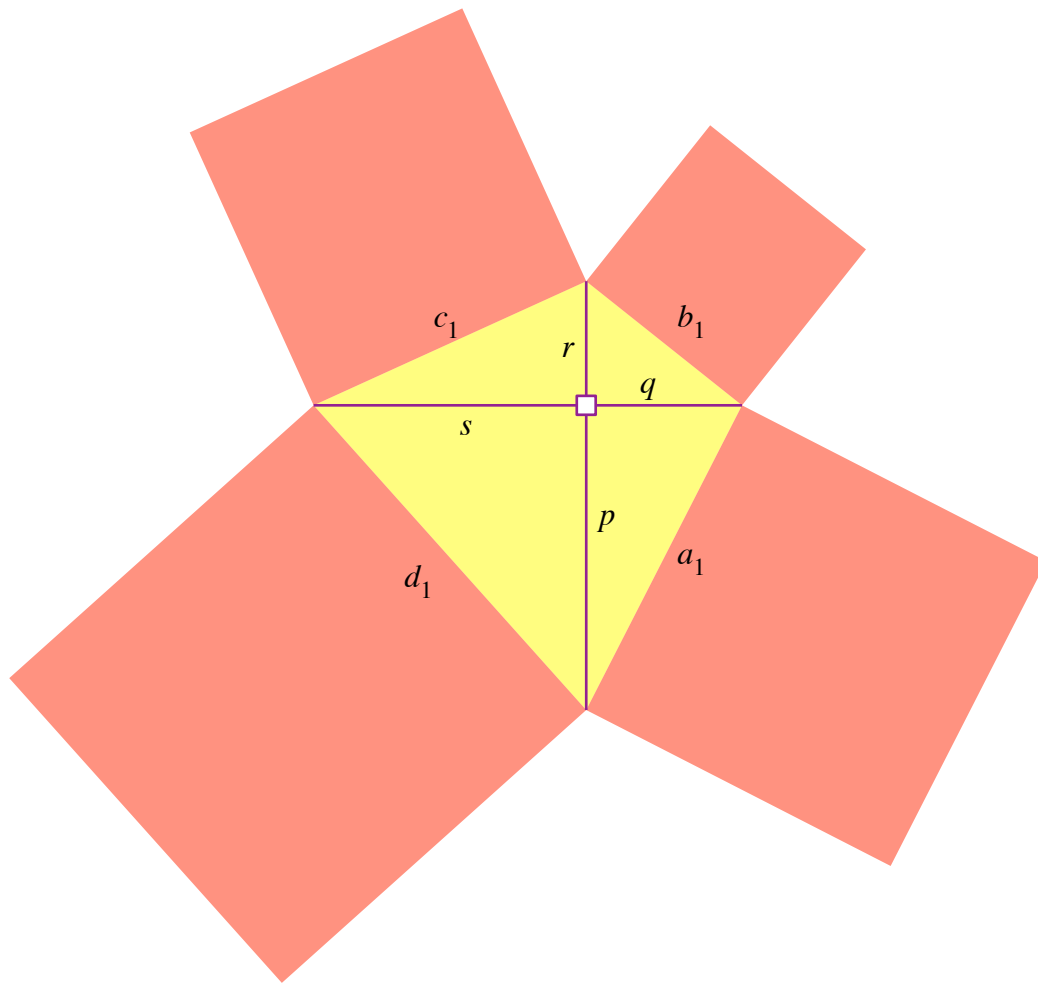
1.4 Wie geht es weiter?

Wie geht es weiter?

2 Bearbeitungen

2.1 Roter Kranz

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 4.

**Abb. 4: Bezeichnungen**

Die Diagonalen unterteilen das Ausgangsviereck in vier rechtwinklige Dreiecke. Nach Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned}
 a_1^2 &= p^2 + q^2 \\
 b_1^2 &= q^2 + r^2 \\
 c_1^2 &= r^2 + s^2 \\
 d_1^2 &= s^2 + p^2
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Die alternierende Flächensumme verschwindet:

$$a_1^2 - b_1^2 + c_1^2 - d_1^2 = 0
 \tag{2}$$

Für den roten Kranz ist es unwesentlich, dass die beiden Diagonalen gleich lang sind.
(2) gilt in jedem Viereck mit orthogonalen Diagonalen.

2.2 Grüner Kranz

Die Abbildung 5 gibt die Bezeichnungen.

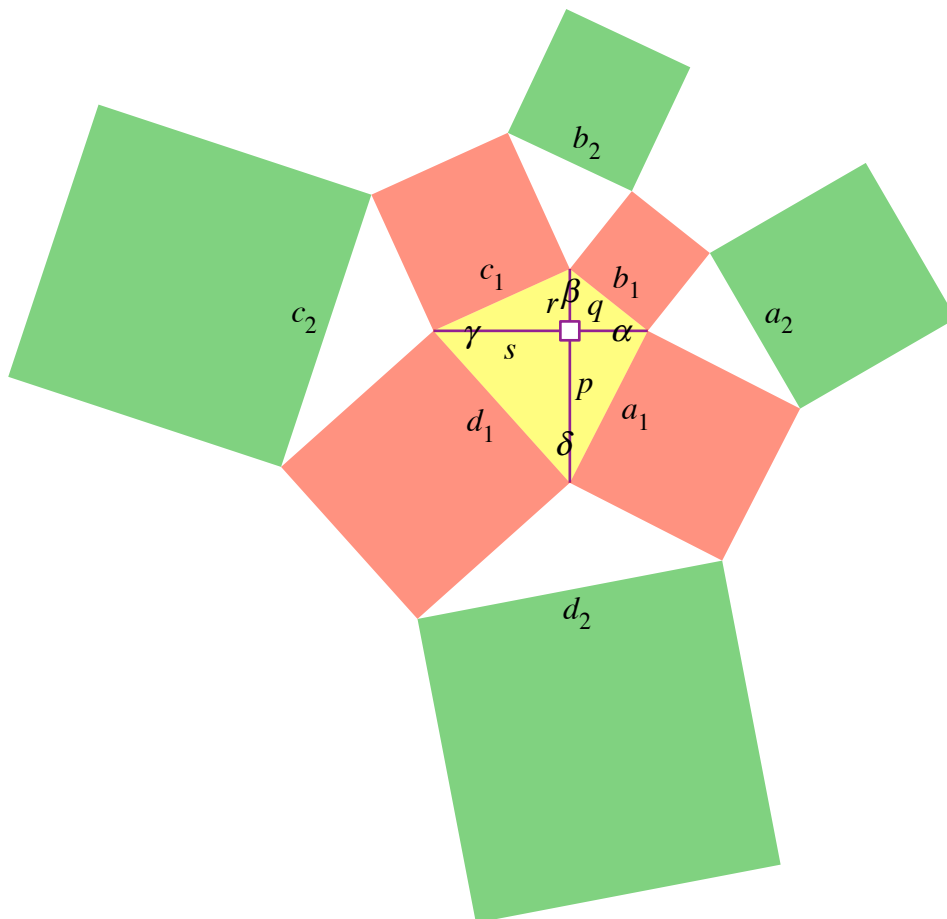


Abb. 5: Bezeichnungen

Nun wird es wichtig, dass die Diagonalen nicht nur orthogonal, sondern auch gleich lang sind. Wir setzen:

$$p + r = q + s = a_0 \quad (3)$$

Nach dem Kosinus-Satz ist

$$a_0^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \cos(\alpha) \quad (4)$$

Der Außenwinkel von α ist $\pi - \alpha$. Daher ist ebenfalls nach dem Kosinus-Satz:

$$a_2^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \cos(\pi - \alpha) = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 \cos(\alpha) \quad (5)$$

Addition von (4) und (5) liefert:

$$a_0^2 + a_2^2 = 2a_1^2 + 2b_1^2 \quad (6)$$

Analog:

$$\begin{aligned} a_0^2 + a_2^2 &= 2a_1^2 + 2b_1^2 \\ a_0^2 + b_2^2 &= 2b_1^2 + 2c_1^2 \\ a_0^2 + c_2^2 &= 2c_1^2 + 2d_1^2 \\ a_0^2 + d_2^2 &= 2d_1^2 + 2a_1^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Wegen (2) ergibt die alternierende Addition in (7):

$$a_2^2 - b_2^2 + c_2^2 - d_2^2 = 0 \quad (8)$$

2.3 Blauer Kranz

Experiment mit DGS ergibt:

$$a_3^2 - b_3^2 + c_3^2 - d_3^2 = 0 \quad (9)$$

Ich habe dafür noch keinen Beweis gefunden. Der Kosinus-Satz ist nicht mehr anwendbar, da die Zwischenräume nun unregelmäßige Vierecke sind.

Ebenso vermute ich:

$$a_n^2 - b_n^2 + c_n^2 - d_n^2 = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (10)$$