

Hans Walser, [20210123]

nd-Kreis

1 Worum geht es?

Formal stringente Verallgemeinerung der Parameterdarstellung des Einheitskreises in höhere Dimensionen.

2 Erinnerung

In der Ebene definiert

$$\left[\cos\left(t - 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \cos\left(t - 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right], t \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

den Einheitskreis in einer nicht ganz üblichen Schreibweise.

3 Verallgemeinerung

Wir verallgemeinern (1) in die Dimension n :

$$\begin{aligned} & \left[\cos\left(t - 0 \cdot \frac{\pi}{n}\right), \cos\left(t - 1 \cdot \frac{\pi}{n}\right), \dots, \cos\left(t - (n-1) \cdot \frac{\pi}{n}\right) \right], t \in [0, 2\pi] \\ & \left[\text{seq}\left(\cos\left(t - k \frac{\pi}{n}\right), k = 0 \dots n-1\right) \right], t \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (2)$$

4 Beispiele

4.1 Im 3d-Raum

Wir haben die Raumkurve:

$$\left[\cos\left(t - 0 \cdot \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(t - 1 \cdot \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(t - 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \right], t \in [0, 2\pi] \quad (3)$$

Die Abbildung 1 zeigt, was dabei herauskommt.

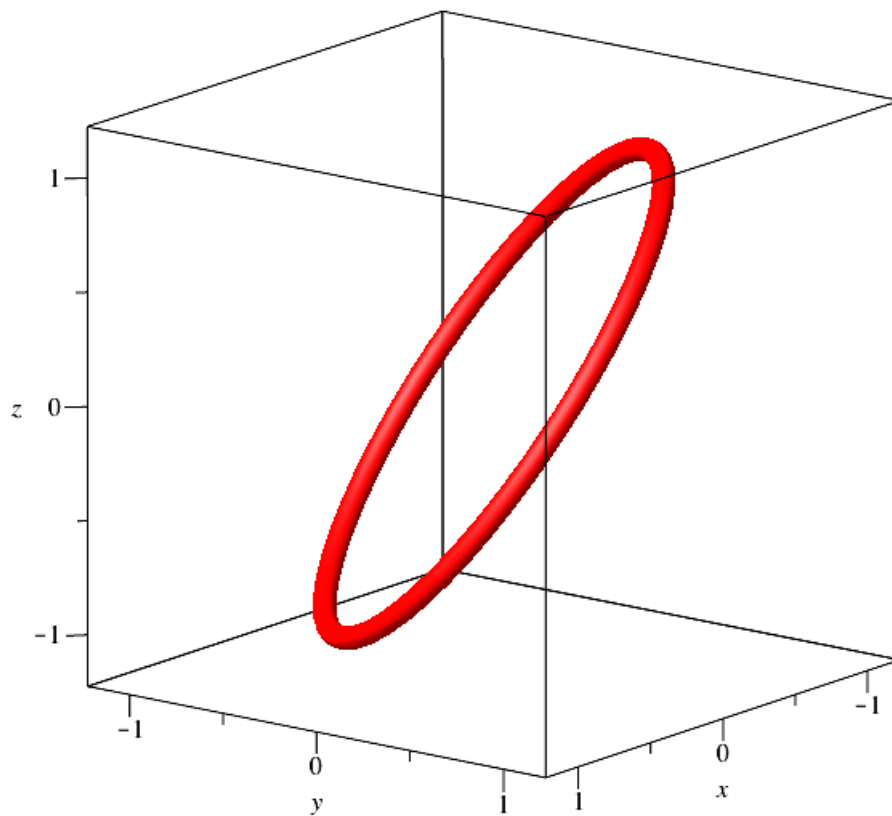


Abb. 1: 3d-Kreis

Es handelt sich offensichtlich um einen gewöhnlichen Kreis.

Er hat den Achsenvektor $[1,-1,1]$ und den Radius $\sqrt{3/2}$ (Abb. 2). Interessant ist das Minuszeichen im Achsenvektor.

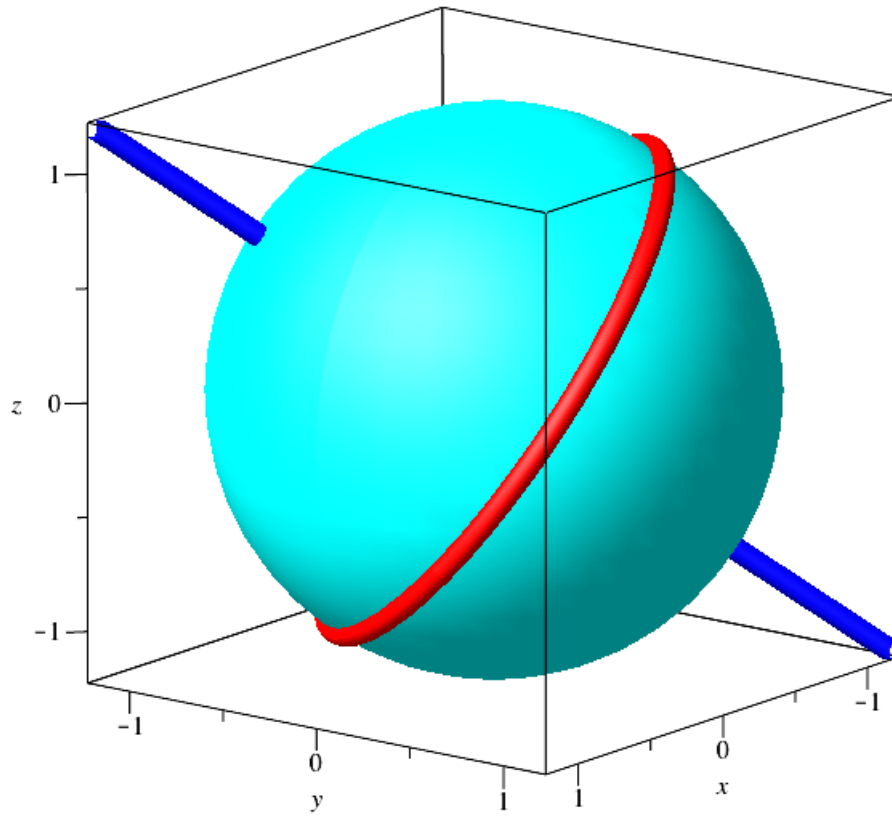


Abb. 2: Achse und Kugel

Durch Variation der Vorzeichen in (3) erhalten wir insgesamt 4 Kreise (Abb. 3). Es handelt sich um die Zentralprojektion des Kuboktaeders auf seine Umkugel.

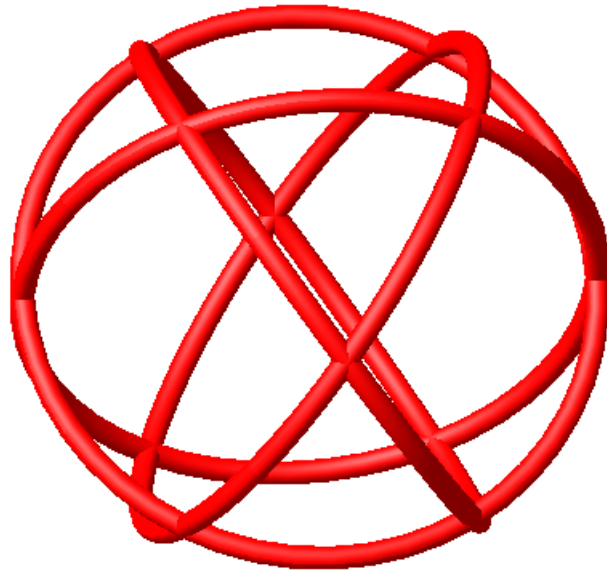


Abb. 3.1: Vier Kreise

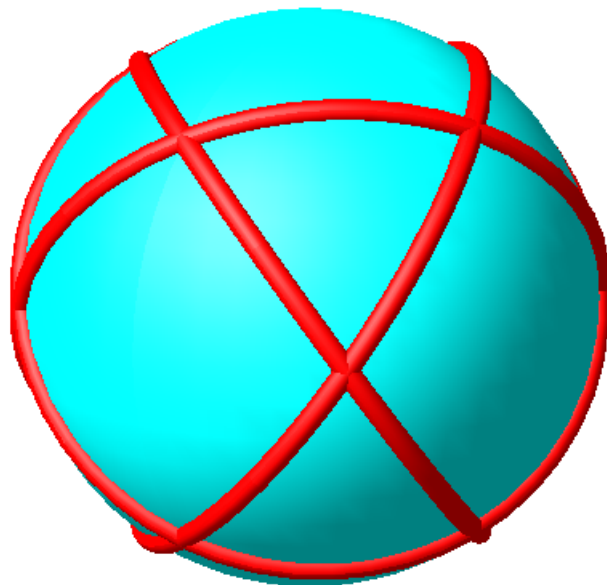


Abb. 4.2: Kreise auf Kugel

4.2 Im 4d-Raum

Wir haben die Parameterdarstellung:

$$\left[\cos(t), \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right), \cos\left(t - 2\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(t - 3\frac{\pi}{4}\right) \right], t \in [0, 2\pi] \quad (4)$$

Der Kreis hat den Radius $\sqrt{2}$. Die Abbildungen 3.1 bis 3.4 zeigen vier Orthogonalprojektionen in den 3d-Raum. Das Suffix zeigt die jeweils weggelassene Dimension an. Es sind offenbar alles Ellipsen.

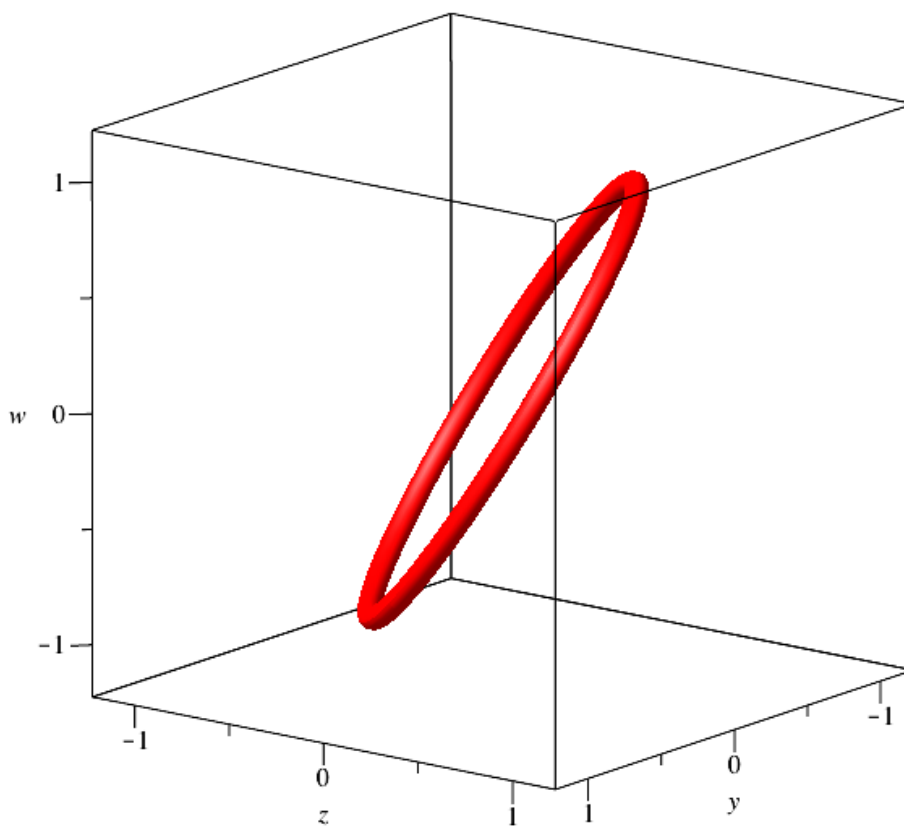


Abb. 4.1

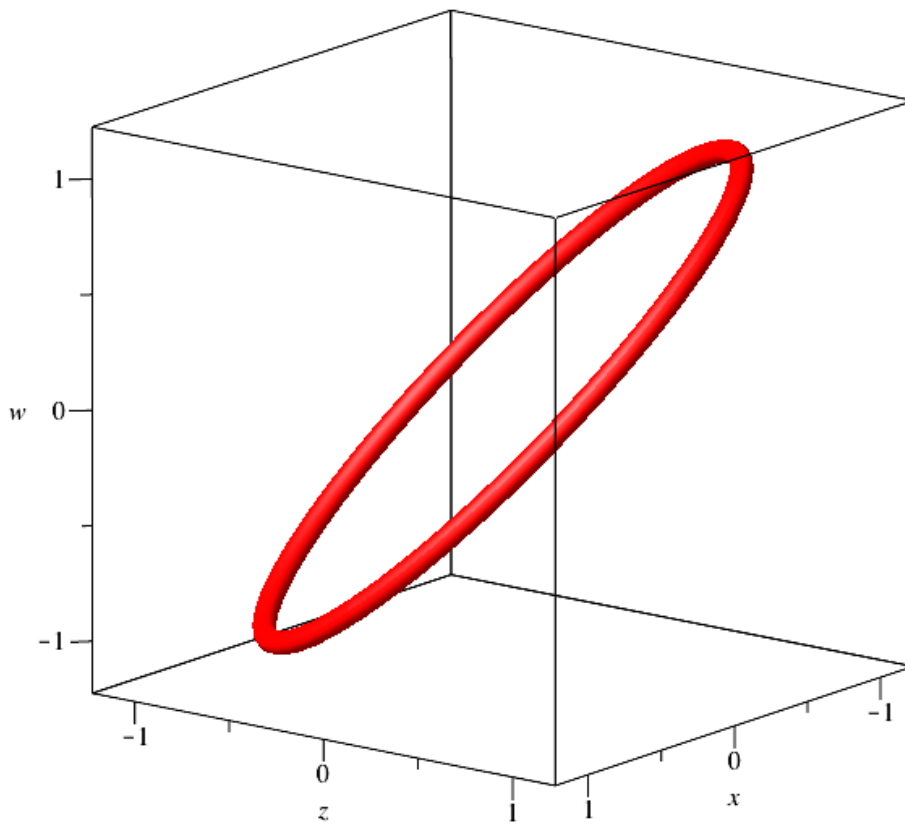


Abb. 4.2

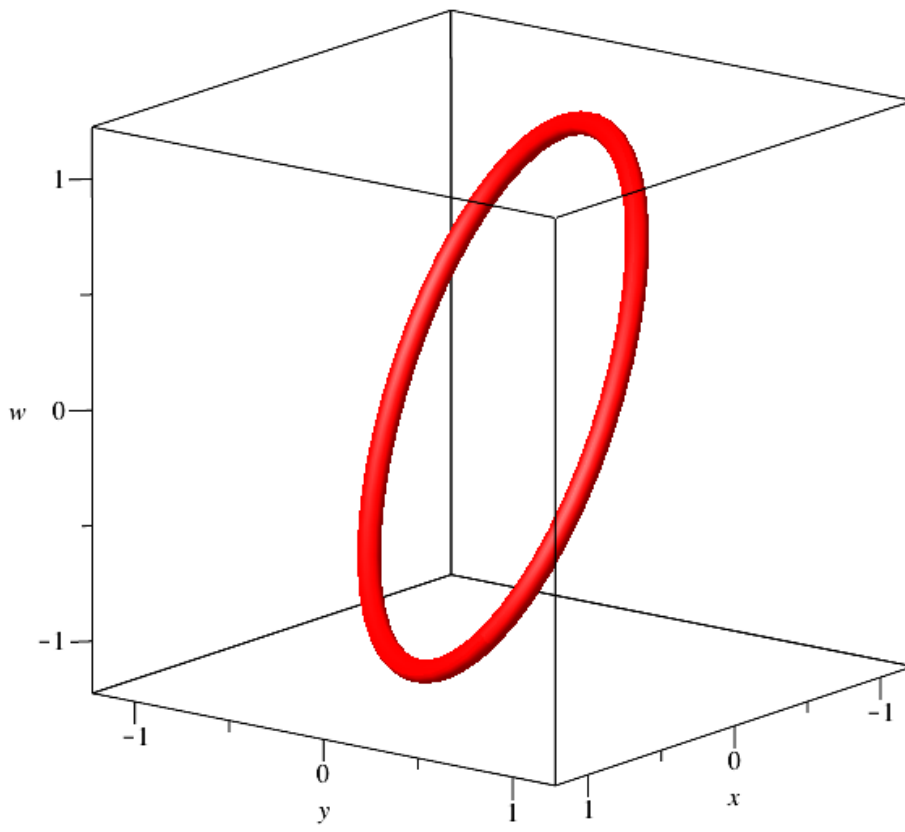


Abb. 4.3

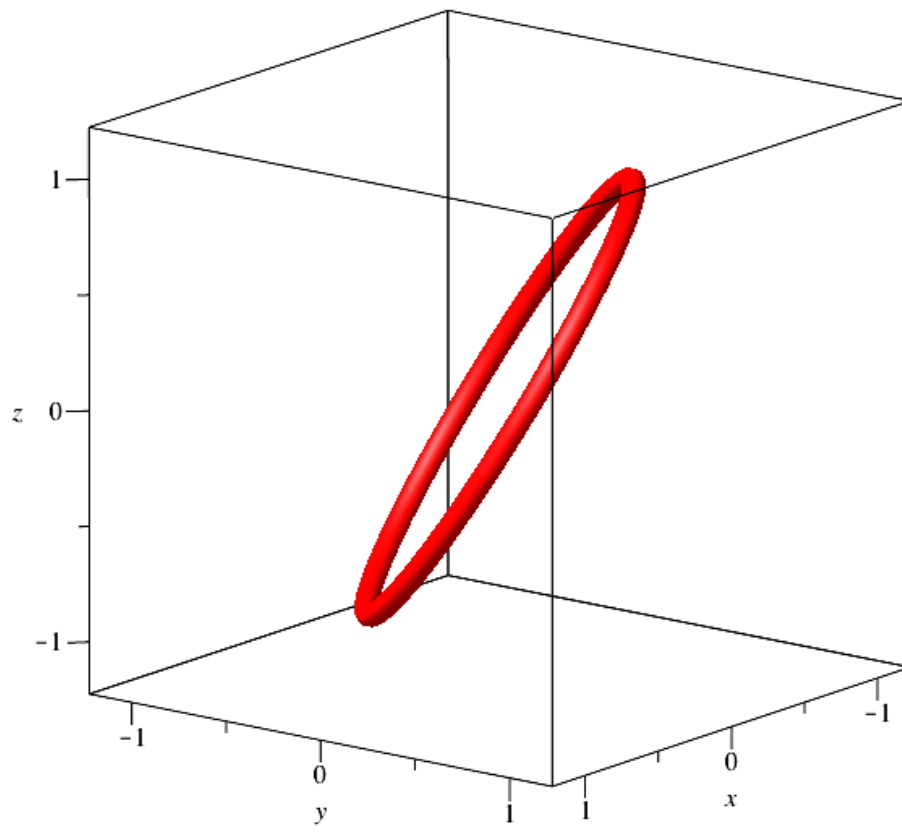


Abb. 4.4