Hans Walser, [20130102]

Optimale Schachtel

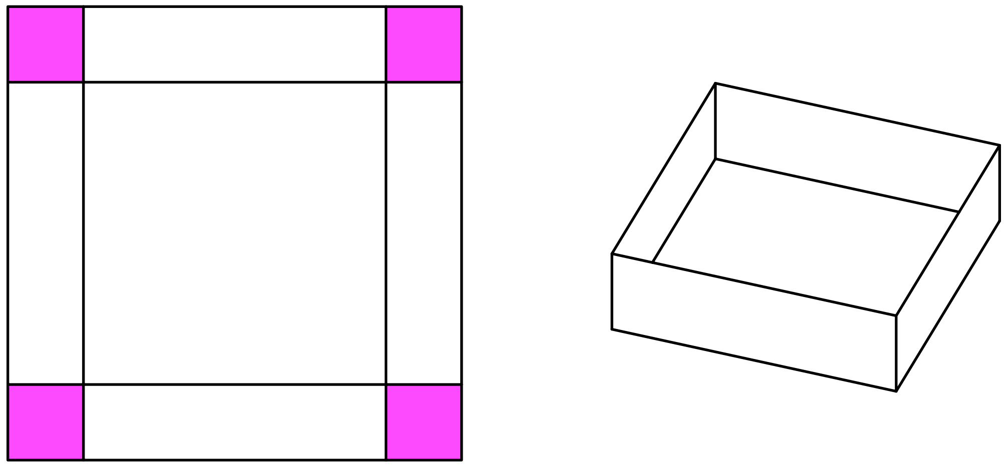
Anregung: [Dodge/Viktora 2002], [Gächter 2012]

Eine klassische Schulaufgabe wird verallgemeinert. Dabei spielen Polygone mit einem Inkreis eine wichtige Rolle.

1 Die Standardaufgabe

Bei einem Quadrat werden an den Ecken kleinere Quadrate abgeschnitten (Abb. 1a). Die verbleibenden Stücke werden hochgeklappt, so dass eine oben offene Schachtel entsteht (Abb. 1b). Fragen der Materialdicke und der Verbindungen an den Kanten (Klebelaschen) werden vernachlässigt.

Bei welcher Höhe hat die Schachtel das größte Volumen?



a) b)

Abb. 1: Konstruktion der Schachtel

Es ist leicht nachzurechnen, dass die Höhe der optimalen Schachtel ein Sechstel der Seitenlänge des Ausgangsquadrates ist.

2 Verallgemeinerung?

Die Aufgabe kann so verallgemeinert werden, dass die Lösung einem einheitlichen Muster folgt und bei geeigneter Formulierung immer dasselbe Resultat liefert.

Als Ausgangsfigur nehmen wir ein Polygon mit einem Inkreis, also ein so genanntes Tangentenpolygon. Die Abbildung 2 illustriert das Vorgehen für ein unregelmäßiges Fünfeck mit Inkreis.

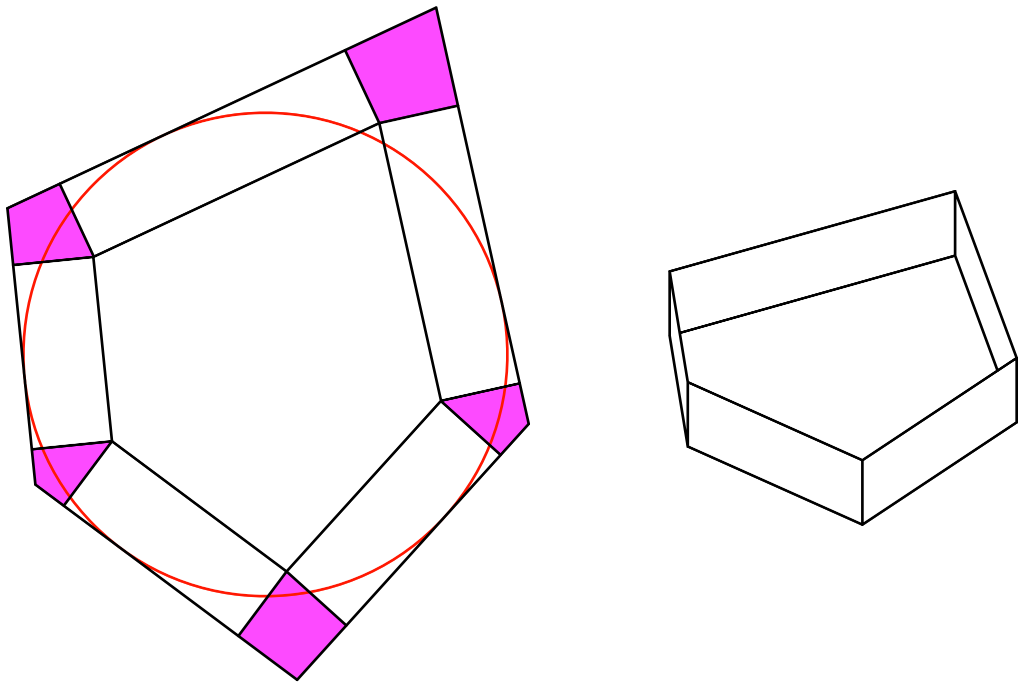


Abb. 2: Verallgemeinerte Schachtel

3 Die Sache mit dem Inkreis

Wenn wir bei einem Polygon, das einen Inkreis hat, an allen Rändern Parallelstreifen derselben Breite abschneiden, bleibt ein Restpolygon übrig, das zum Ausgangspolygon ähnlich ist (Abb. 3). Insbesondere hat es auch einen Inkreis.

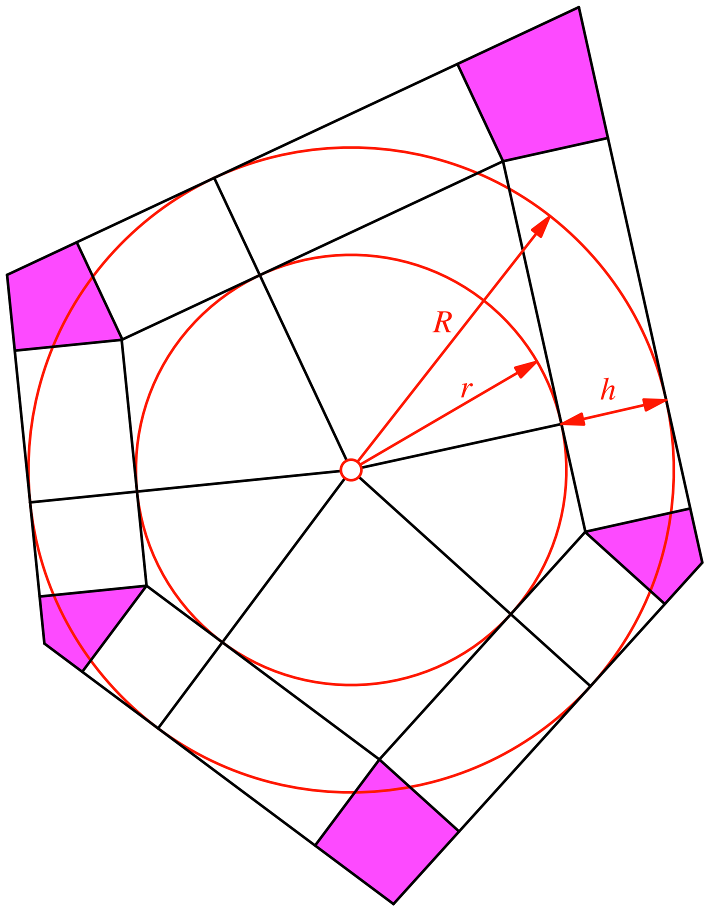


Abb. 3: Die Sache mit dem Inkreis

Wir bezeichnen mit R den Inkreisradius des Ausgangspolygons, mit r den Inkreisradius des Restpolygons. Es hat gegenüber dem Ausgangspolygon den Längenreduktionsfaktor $\frac{r}{R}$. Dieses Restpolygon wird dann zum Boden der Schachtel.

Die Differenz $h = R - r$ ist zunächst die Breite der Parallelstreifen und dann die Höhe der Schachtel.

4 Die Rechnung

Wir bezeichnen mit A den Flächeninhalt des Ausgangspolygons. Das Restpolygon, also der Schachtelboden, hat dann den Flächeninhalt:

$$A\frac{r^2}{R^2}$$

Für das Schachtelvolumen V ergibt sich:

$$V(r) = A\frac{r^2}{R^2}(R-r) = \frac{A}{R^2}\left(Rr^2 - r^3\right)$$

Nun läuft es weiter wie in der Schule:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{R^2}\left(2Rr - 3r^2\right) \overset{!}{=} 0$$

Wir erhalten die beiden Lösungen $r_1 = 0$ (Minimum) und $r_2 = \frac{2}{3}R$ (Maximum). Die optimale Lösung ist also:

$$r = \frac{2}{3}R, h = \frac{1}{3}R$$

Die Lösung ist unabhängig von der Form des Ausgangspolygons und hängt nur vom Inkreisradius R ab.

Die Abbildung 4 zeigt die optimale Schachtel im Schrägbild mit dem Inkreis im Restpolygon am Boden.

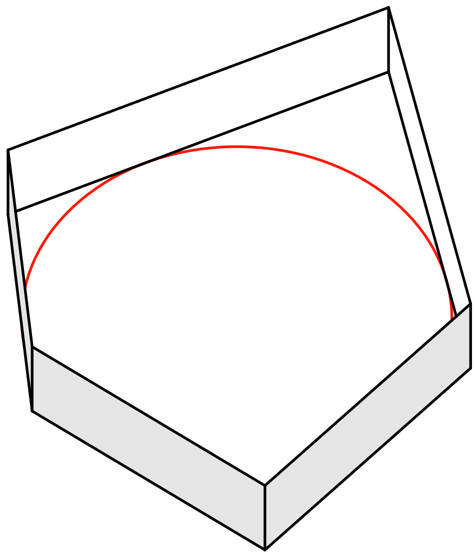


Abb. 4: Optimale Schachtel

5 Der Abfall

Der Abfall an den Ecken lässt sich zu einem weiteren ähnlichen Polygon zusammenfügen (Abb. 5).

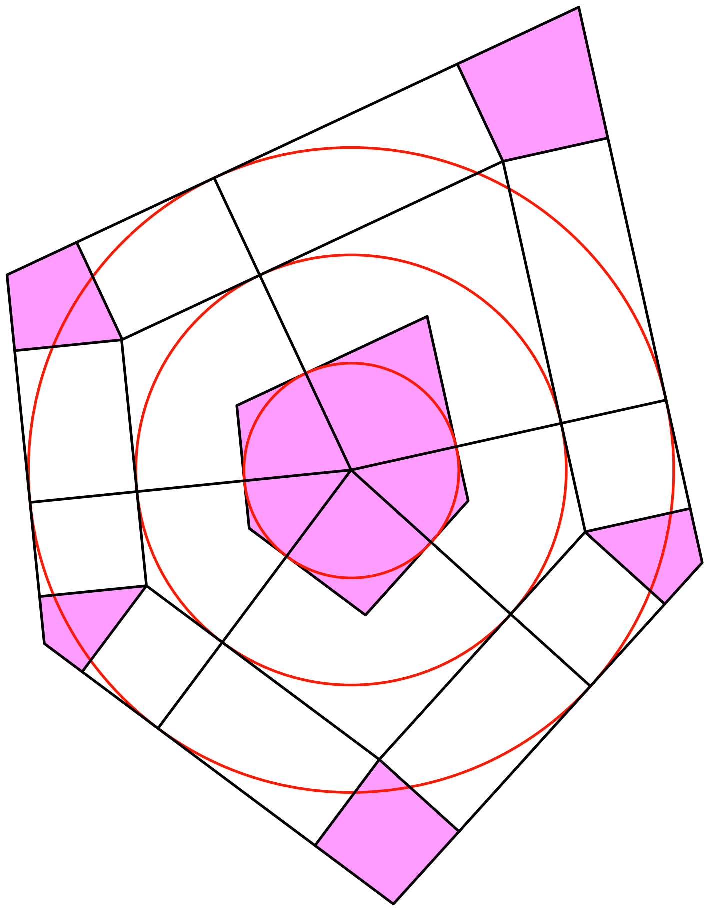


Abb. 5: Abfallsammelstelle

Im optimalen Fall hat diese Abfallfigur den Inkreisradius $h = \frac{1}{3}R$. Ihre Fläche ist also $\frac{1}{9}A$. Die Oberfläche der optimalen Schachtel ist $\frac{8}{9}A$.

6 Bemerkungen

6.1 Quadrat

Das Quadrat des Einführungsbeispiels hat die Seitenlänge $2R$. Die optimale Höhe ist also ein Sechstel der Seitenlänge.

6.2 Kreis und Kreiszylinder

Die Sache funktioniert auch noch mit einem Kreis als Ausgangsfigur. Hier kommt die Vorstellung eines Vieleckes mit unendlich vielen Ecken zum Tragen. Das Einschneiden bei den Ecken braucht etwas Intuition (Abb. 6).

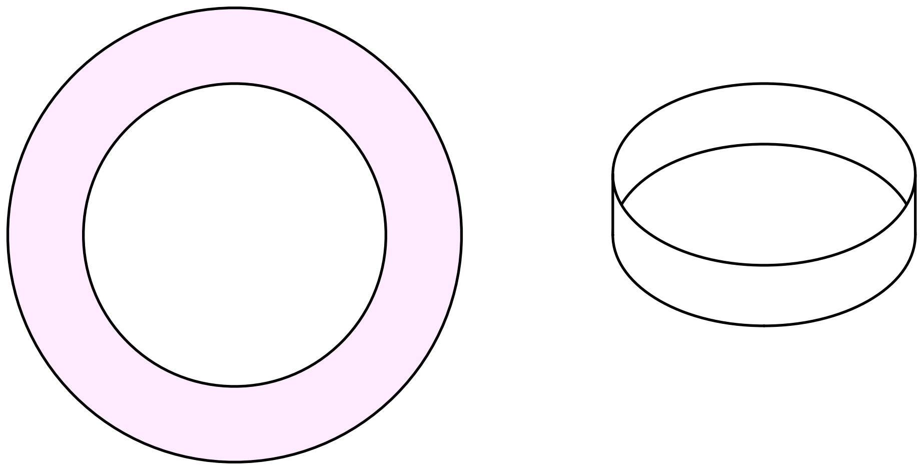


Abb. 6: Oben offener Kreiszylinder

7 Andere Dimensionen

7.1 Allgemein. Eine Vermutung

Ich vermute, dass sich die Sache in den $\mathbb{R}^n$ verallgmeinern lässt: Im $\mathbb{R}^n$ beginnen wir mit einem Polytop (Verallgemeinerung von Punkt, Strecke, Polygon, Polyeder ... , vgl. [Coxeter 1973]), das eine Sphäre S_{n-1} mit dem Radius R als Insphäre hat. Das Polytop habe das n-dimensionale Volumen A.

Nun reduzieren wir das Polytop mit dem Längenfaktor $\frac{r}{R}$ (zentrische Streckung). Das reduzierte Polytop hat das n-dimensionale Volumen $\frac{r^n}{R^n}A$. Die für mich offene Frage ist nun, wie das Ausschneiden an den Ecken zu verallgemeinern ist. Man muss wohl auch noch an Kanten etc. etwas wegschneiden. Jedenfalls klappen wir dann hoch in den $\mathbb{R}^{n+1}$. So entsteht eine oben offene Schachtel im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit dem reduzierten Polytop als Boden. Boden und Seiten der Schachtel sind n-dimensionale Hyperebenen im $\mathbb{R}^{n+1}$. Für das $(n+1)$-dimensionale Volumen V der Schachtel erhalten wir:

$$V(r) = A\frac{r^n}{R^n}(R-r) = \frac{A}{R^n}\left(Rr^n - r^{n+1}\right)$$

Es ist:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{R^n}\left(nRr^{n-1} - (n+1)r^n\right)$$

Das optimale Volumen erhalten wir für $r = \frac{n}{n+1}R$ und $h = \frac{1}{n+1}R$.

7.2 Eindimensional

Wir biegen eine Strecke der Länge $2R$ an beiden Enden rechtwinklig hoch (Abb. 7). Die optimale Fläche erhalten wir für $r = h = \frac{1}{2}R$. Anwendung: Querschnitt eines Kanals.

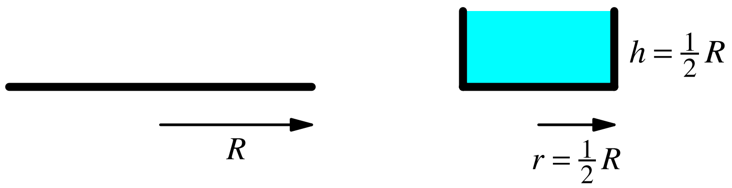


Abb. 7: Optimaler Fall

Bei diesem Beispiel muss nichts weggeschnitten werden, es entsteht kein Abfall.

8 Rechteck und Quader

Das Rechteck hat keinen Inkreis und passt daher nicht zu unseren Beispielen. In Sonderfällen passt es aber gleichwohl.

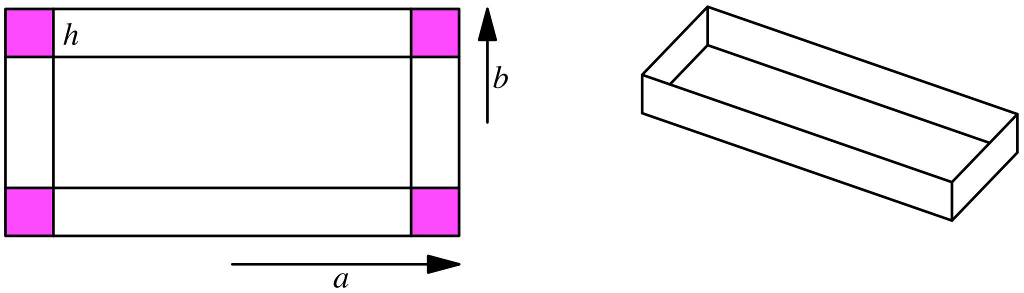


Abb. 8: Rechteck und quaderförmige Schachtel

Wir arbeiten mit einer Schachtel der Länge $2a$ und der Breite $2b$ (Abb. 8). In Abhängigkeit der Höhe h erhalten wir das Volumen V:

$$V(h) = 4\left(h^3 - (a+b)h^2 + abh\right)$$

Für die optimale Schachtel ergibt sich die Höhe:

$$h(a,b) = \frac{1}{3}\left(a + b - \sqrt{a^2 - ba + b^2}\right)$$

Insbesondere ist $h(a,a) = \frac{a}{3}$. Das ist der Sonderfall des Quadrates.

Wenn wir b konstant halten, aber a immer größer werden lassen, muss sich der Fall des Querschnittes eines Kanals ergeben. Die Limesbildung ist etwas aufwändig (vgl. [Dodge/Viktora 2002]).

$$\lim_{a\to\infty} h(a,b) = \lim_{a\to\infty} \tfrac{1}{3}\left(a+b-\sqrt{a^2-ba+b^2}\right) = \lim_{a\to\infty} \tfrac{1}{3}\left(a+b-a\sqrt{1-\tfrac{b}{a}+\tfrac{b^2}{a^2}}\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{\left(a+b-a\sqrt{1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}}\right)\left(a+b+a\sqrt{1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}}\right)}{3\left(a+b+a\sqrt{1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}}\right)} = \lim_{a\to\infty} \frac{b}{1+\frac{b}{a}+\sqrt{1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{b}{2}$$

Dies entspricht tatsächlich dem Fall des Kanalquerschnittes.

Literatur

[Coxeter 1973] Coxeter, H.S.M.: Regular Polytopes. Third Edition. New York: Dover 1973. ISBN 0-486-61480-8

[Dodge/Viktora 2002] Dodge, Walter and Viktora, Steve: Thinking out of the Box ... Problem. National Council of Teachers of Mathematics 2002.

[Gächter 2012] Gächter, Albert A.: Aufgabenkultur. Anregungen für den Mathematikunterricht. St. Gallen: mefi-Verlag 2012. ISBN 978-3-9523962-1-6.