Hans Walser, [20040509a], [20151011]

Ortskreise

1 Worum es geht

Es soll eine Schar von Ortskreisen über den Punkten $(0,-1)$ und $(0,1)$ generiert werden.

1.1 Einfachste Parametrisierung

In der folgenden Parametrisierung ist a der Scharparameter und t der Kurvenparameter.

$$\left.\begin{array}{l} x(t,a)=\frac{\sin(t)+\cos(a)}{\sin(a)} \\ y(t,a)=\frac{\cos(t)}{\sin(a)} \end{array}\right\} t\in[0,2\pi],\ a\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \Delta a=\frac{\pi}{18} \qquad (1)$$

Die Abbildung 1 zeigt diese Version.

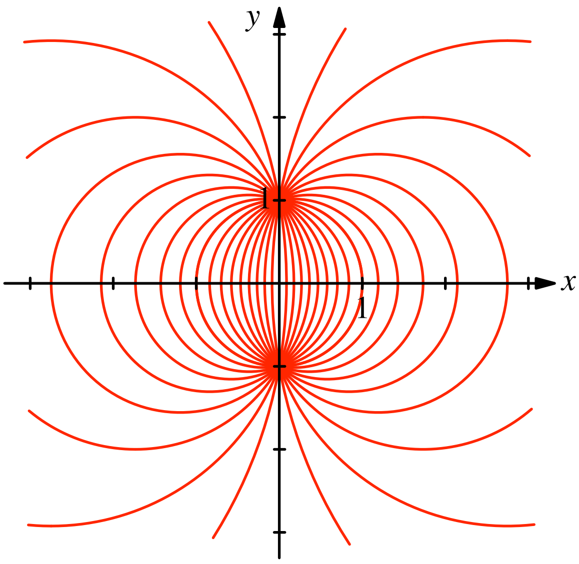

Abb. 1: Einfache Parametrisierung

Durch die Vertauschung von t und a erhalten wir die Situation der Abbildung 2.

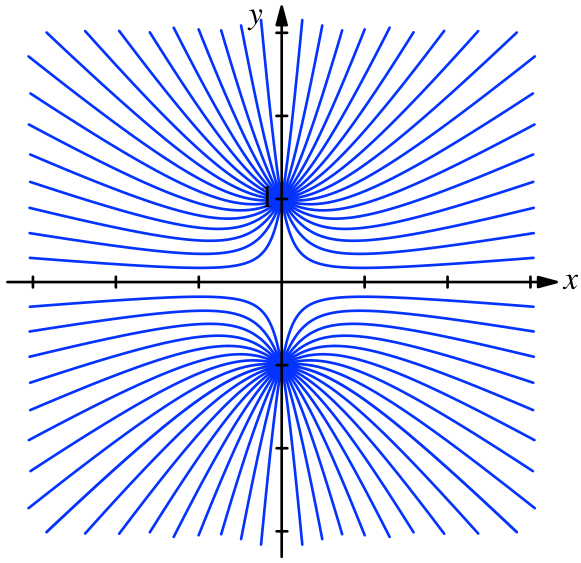

Abb. 2: Vertauschung der Parameter

Die Abbildung 3 zeigt das Netz. Es ist nicht orthogonal, schon gar nicht konform.

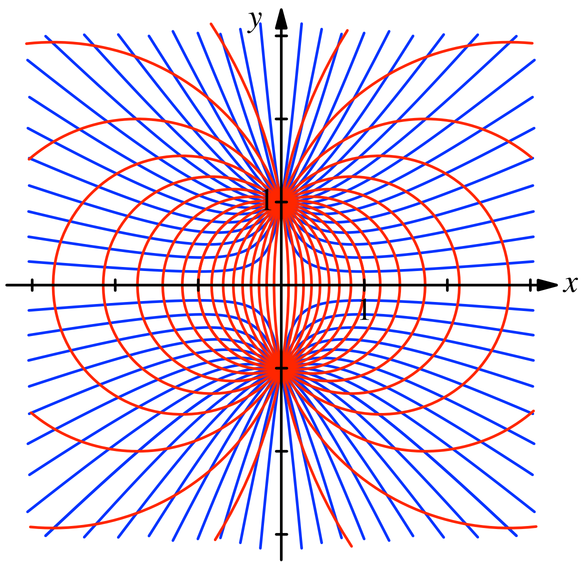

Abb. 3: Netz

1.2 Komplexer Tangens

Wir verwenden die Parametrisierung:

$$\left.\begin{aligned} x(t,a) &= \frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos^2(a)+\sinh^2(t)} \\ y(t,a) &= \frac{\sinh(t)\cosh(t)}{\cos^2(a)+\sinh^2(t)} \end{aligned}\right\} t \in \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right], a \in \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right], \Delta a = \tfrac{\pi}{36} \tag{2}$$

Damit erhalten wir die Situation der Abbildung 4.

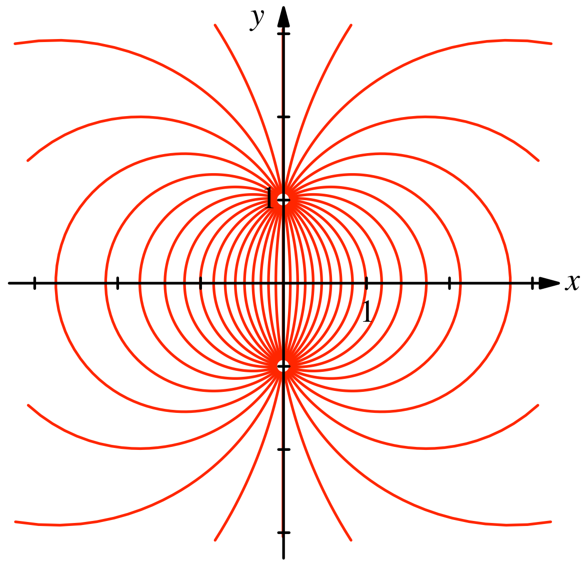

Abb. 4: Andere Parametrisierung

Durch die Vertauschung von t und a erhalten wir wiederum Kreise, es sind dies die Apolloniuskreise.

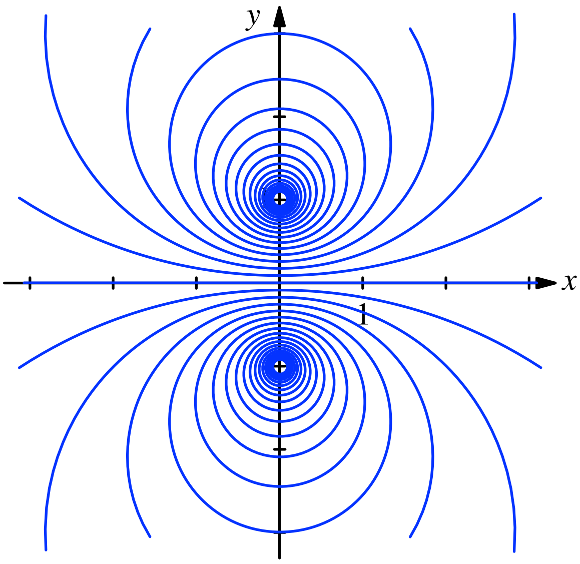

Abb. 5: Apolloniuskreise

Die Abbildung 6 zeigt das Netz:

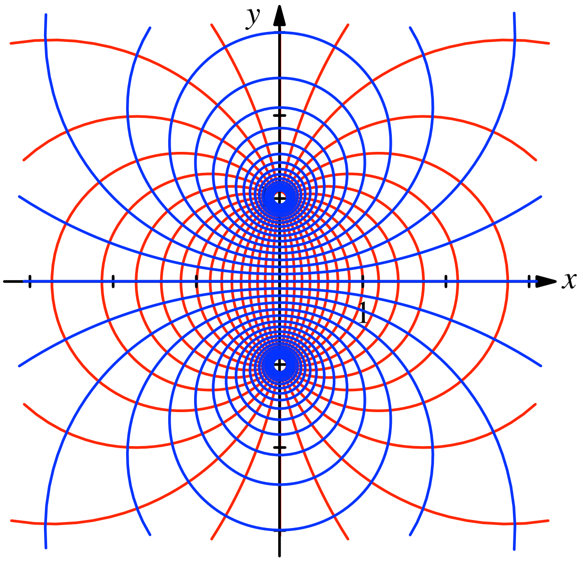

Abb. 6: Netz

Es handelt sich um ein konformes Netz, nämlich um das Netz der komplexen Tangensfunktion.

Kontrolle mit Maple:

```
restart:
with(plots): with(plottools):
conformal(z, z=-Pi/2-I*Pi/2..Pi/2+I*Pi/2, grid=[37,37], scaling = constrained, tickmarks=[spacing(Pi/4, 0),spacing(Pi/4, 0)], color=[red, blue]);
conformal(tan(z), z=-Pi/2-I*Pi/2..Pi/2+I*Pi/2, grid=[37,37], scaling = constrained, color=[red, blue], numxy=[400,400], view=[-3..3,-3..3]);
```

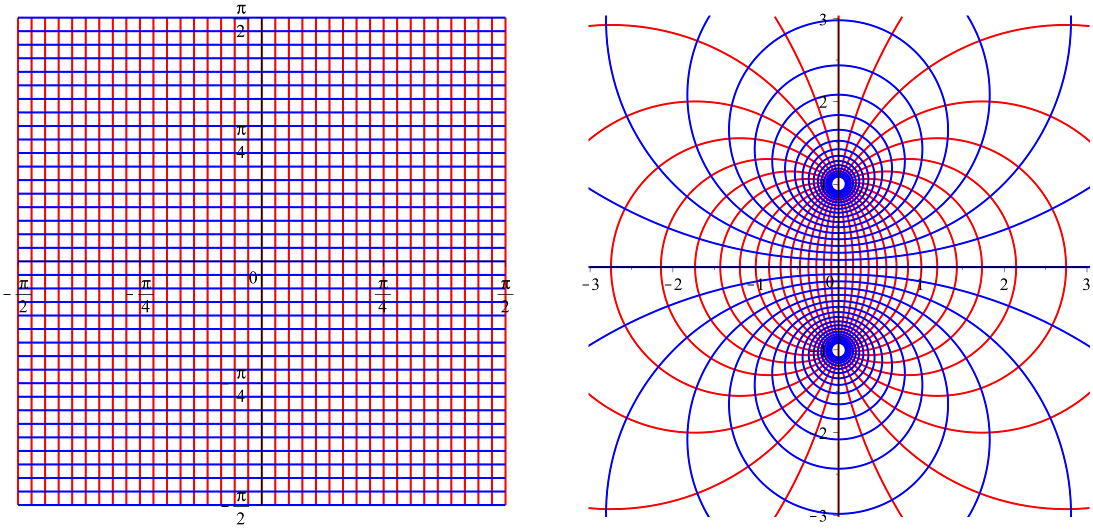

Abb. 7: Netz der konformen Tangensfunktion

Berechnung von Real- und Imaginärteil:

```
restart:
z:=a+I*t;
w:=tan(z);
x:=evalc(Re(w));
y:=evalc(Im(w));
```

$$z := a + \mathrm{I}\, t$$

$$w := \tan(a + \mathrm{I}\, t)$$

$$x := \frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(a)^2 + \sinh(t)^2}$$

$$y := \frac{\sinh(t)\cosh(t)}{\cos(a)^2 + \sinh(t)^2}$$

Abb. 8: Berechnung von Real- und Imaginärteil

1.3 Etwas einfachere Parametrisierung

Wir verwenden die Parametrisierung:

$$\left.\begin{aligned} x(t,a) &= \frac{\sin(a)}{\cos(a)+\cosh(t)} \\ y(t,a) &= \frac{\sinh(t)}{\cos(a)+\cosh(t)} \end{aligned}\right\} t \in [-\pi,\pi],\ a \in [-\pi,\pi],\ \Delta a = \tfrac{\pi}{18} \qquad (3)$$

Diese Parametrisierung ergibt sich aus der Parametrisierung (2) über die komplexe Tangensfunktion durch Verdoppeln der Parameter.

Damit erhalten wir die Situation der Abbildung 9.

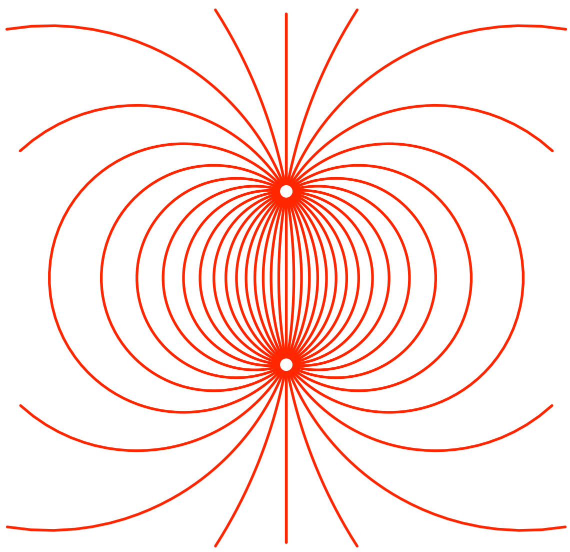

Abb. 9: Ortsbogen zum Dritten

Die Abbildung 10 zeigt die Apolloniuskreise, die Abbildung 11 das Netz.

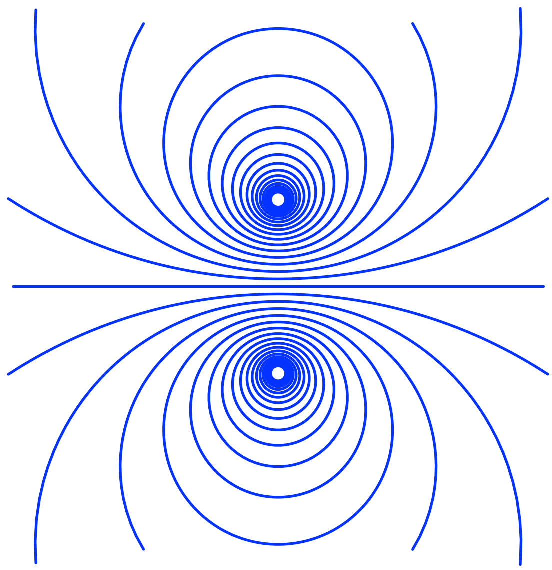

Abb. 10: Apolloniuskreise

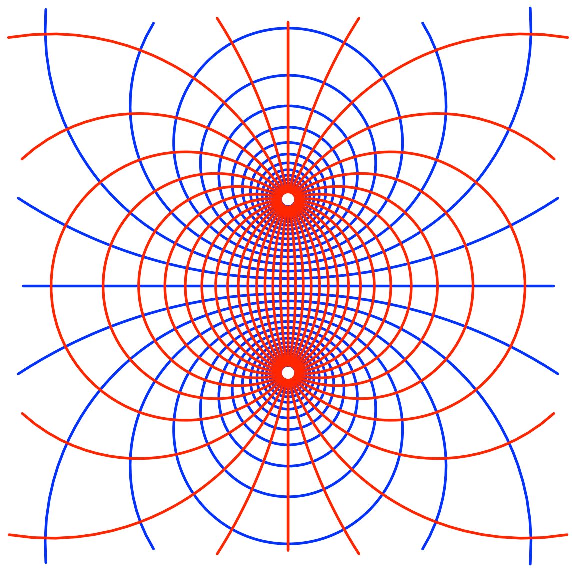

Abb. 11: Netz