Hans Walser, [20230109]

Parabeln im Dreieck

1 Worum geht es?

Figuren. Sonst nichts

2 Allgemeines Dreieck

Die Abbildung 1 zeigt ein „allgemeines“ (unregelmäßiges) Dreieck in der klassischen zyklischen RGB-Färbung.

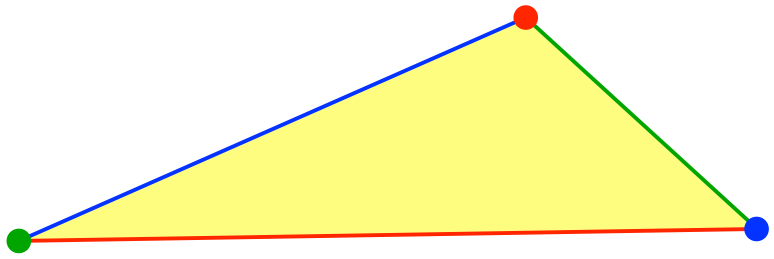

Abb. 1: Unregelmäßiges Dreieck

3 Parabeln

Nun zeichnen wir die Parabel mit der roten Seite als Leitlinie und der roten Ecke als Brennpunkt ein (Abb. 2).

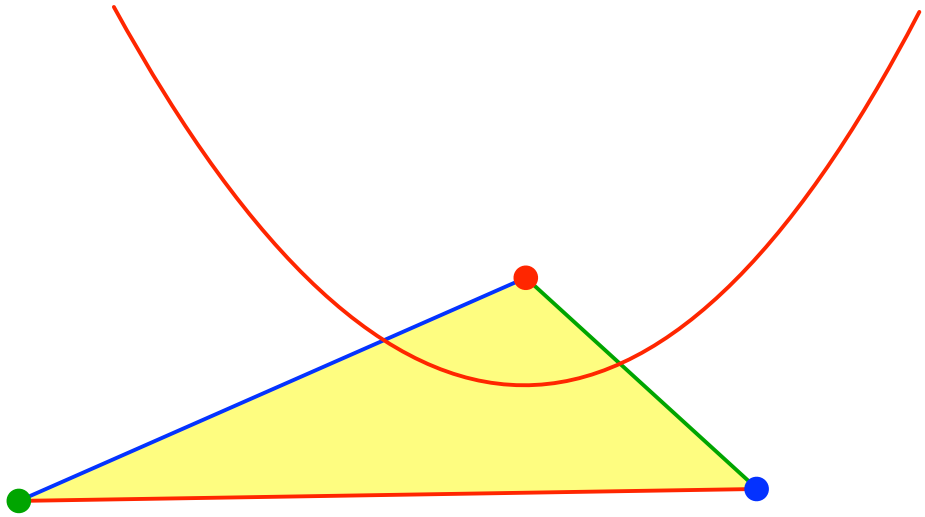

Abb. 2: Rote Parabel

Die Parabel berührt die rote Mittelparallele des Dreiecks (Abb. 3).

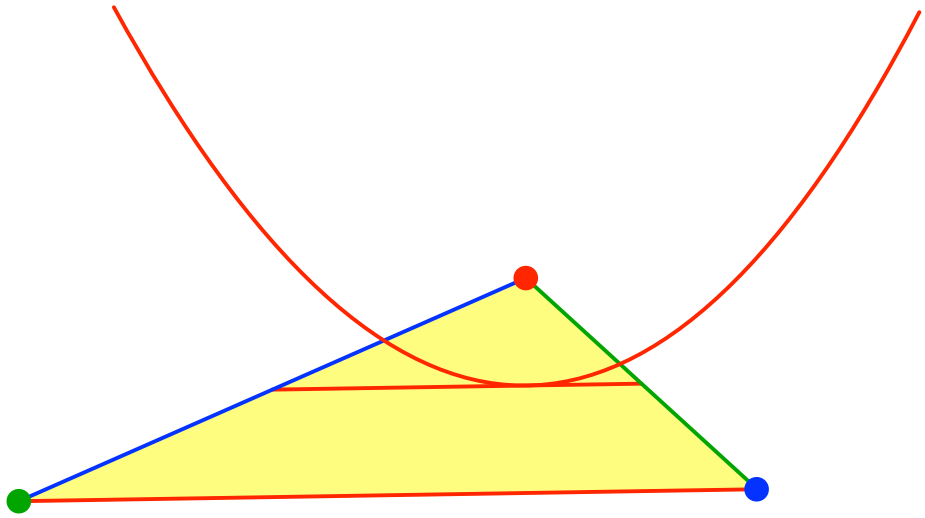

Abb. 3: Mittelparallele

Analog zeichnen wir die grüne und die blaue Parabel (Abb. 4).

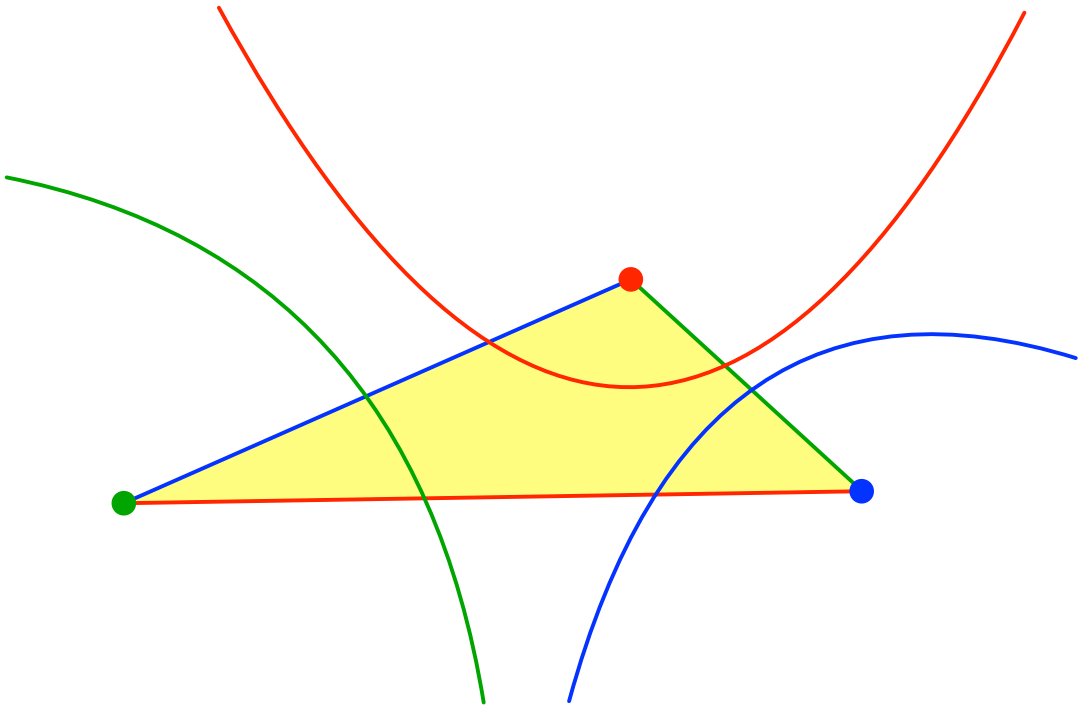

Abb. 4: Alle drei Parabeln

Die drei Parabeln sind disjunkt. Sie haben keine gemeinsamen Punkte. Ist dies allgemein so?

4 Eine indirekte Überlegung

Nehmen wir einmal an, die blaue und die grüne Parabel hätten einen gemeinsamen Punkt (Abb. 5).

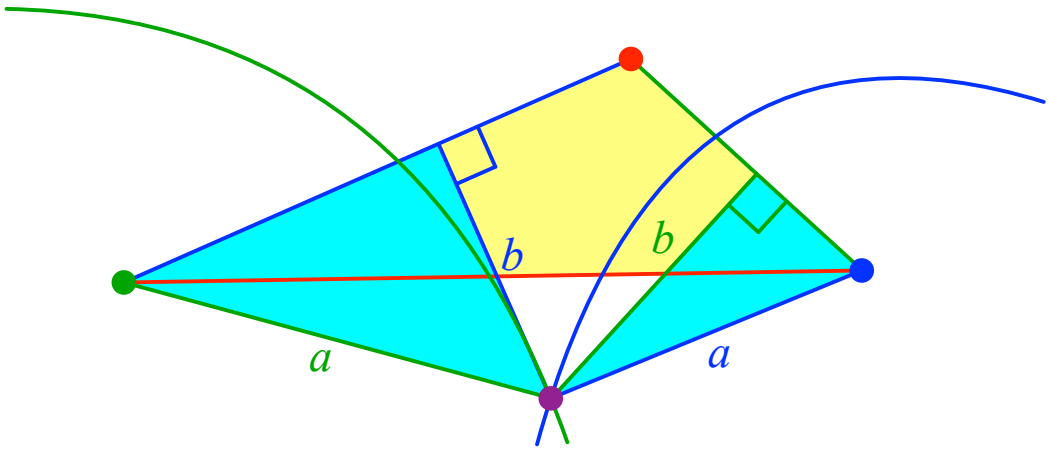

Abb. 5: Gemeinsamer Punkt

Aufgrund der Abstandsdefinition der grünen Parabel ist dann:

$a = b$

Analog gilt für die blaue Parabel:

$a = b$

Wegen der hellblau eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck gelten die beiden Ungleichungen:

$a \geq b$ und $a \geq b$

Wir haben also die Ungleichungskette:

$a \geq b = a \geq b = a$

Damit haben wir eine sogenannte „exakte Abschätzung“. Es müssen alle vier Strecken gleich groß sein:

$a = b = a = b$

Dies ist nur im gleichschenkligen Dreieck möglich (Abb. 6).

5 Gleichschenkliges Dreieck

Im gleichschenkligen Dreieck berühren sich die beiden symmetrisch liegenden Parabeln auf der Symmetrieachse (Abb. 6).

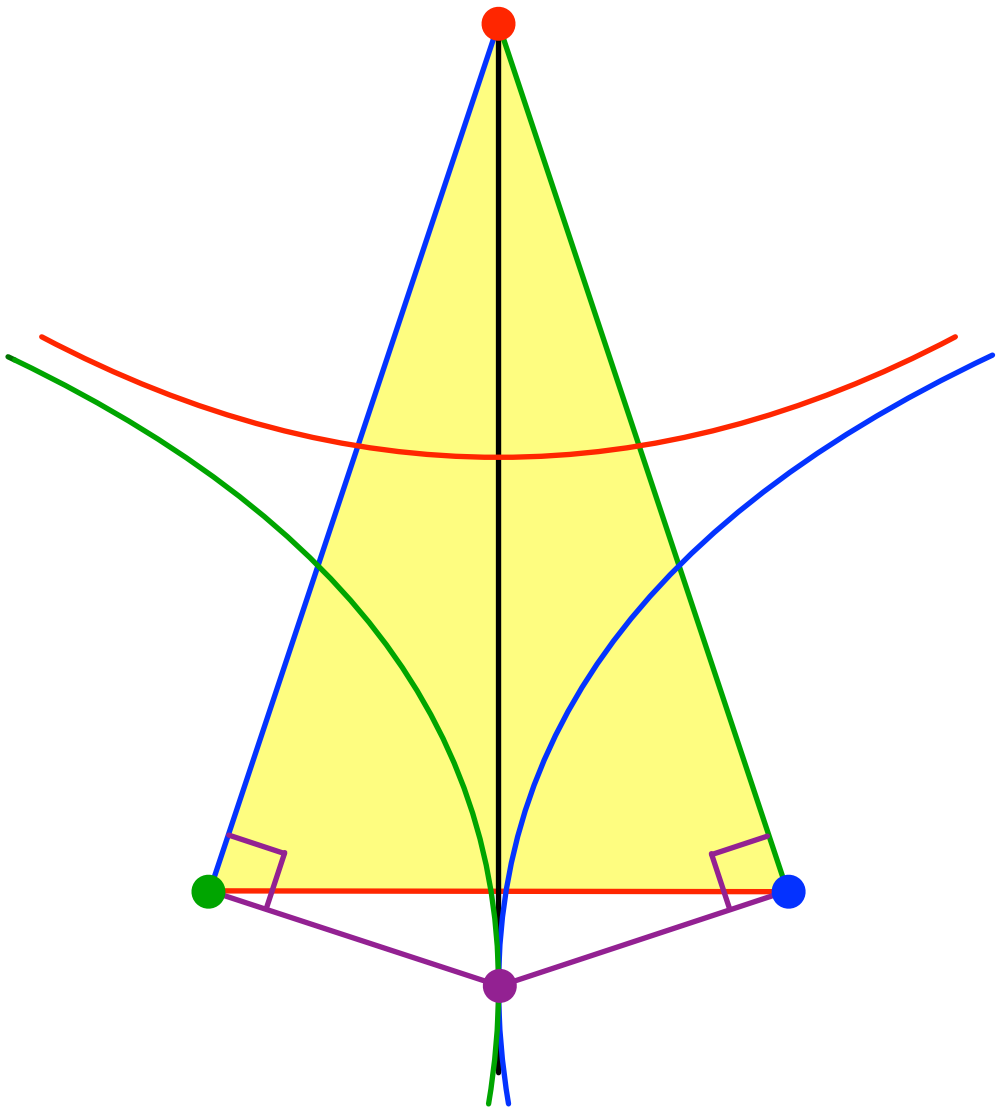

Abb. 6: Gleichschenkliges Dreieck

6 Gleichseitiges Dreieck

Das gleichseitige Dreieck ist in dreifacher Hinsicht gleichschenklig. Daher berühren sich die drei Parabeln paarweise (Abb. 7).

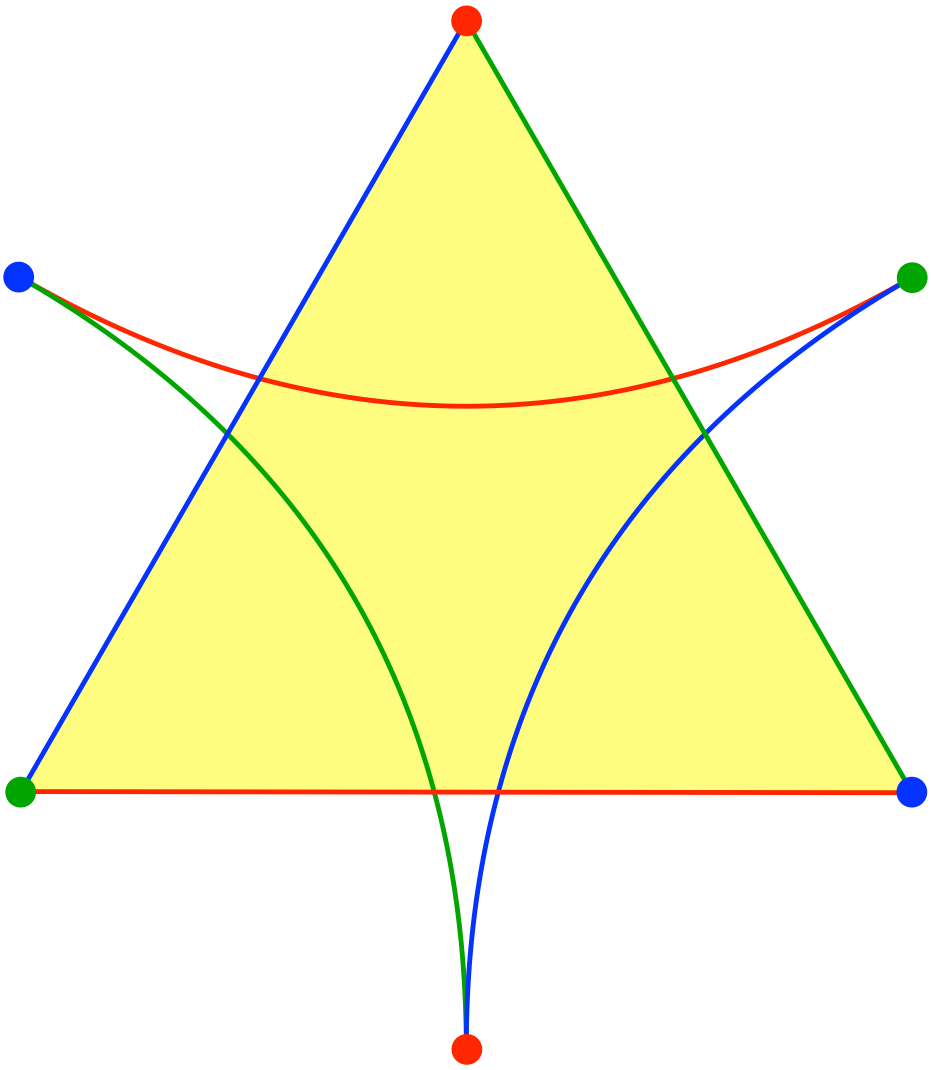

Abb. 7: Gleichseitiges Dreieck

Die Berührungspunkte liegen auf dem Umkreis des Dreieckes und ergänzen die Dreiecksecken zum regelmäßigen Sechseck (Abb. 8).

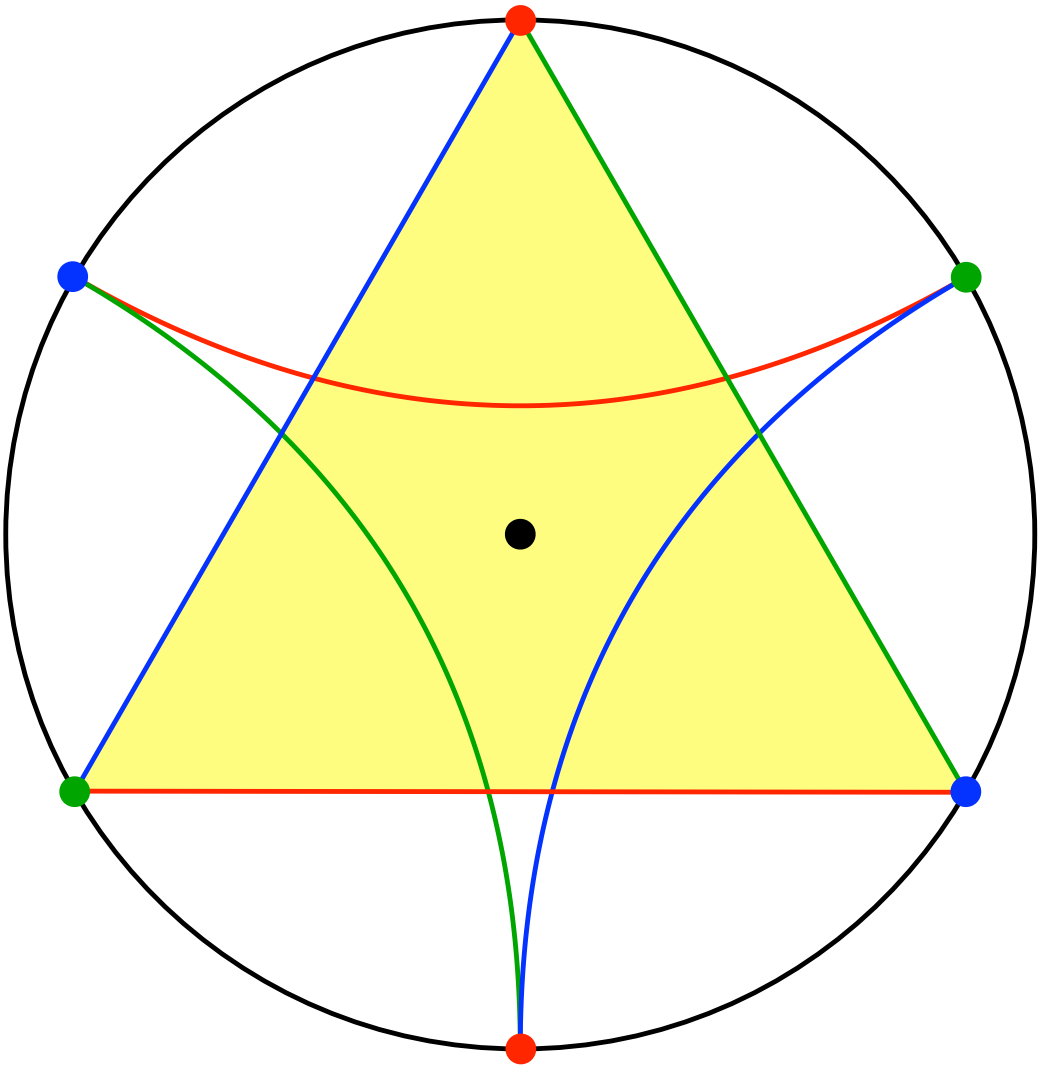

Abb. 8: Umkreis

Die Parabeln berühren das Kantenmittendreieck und dessen Inkreis (Abb. 9).

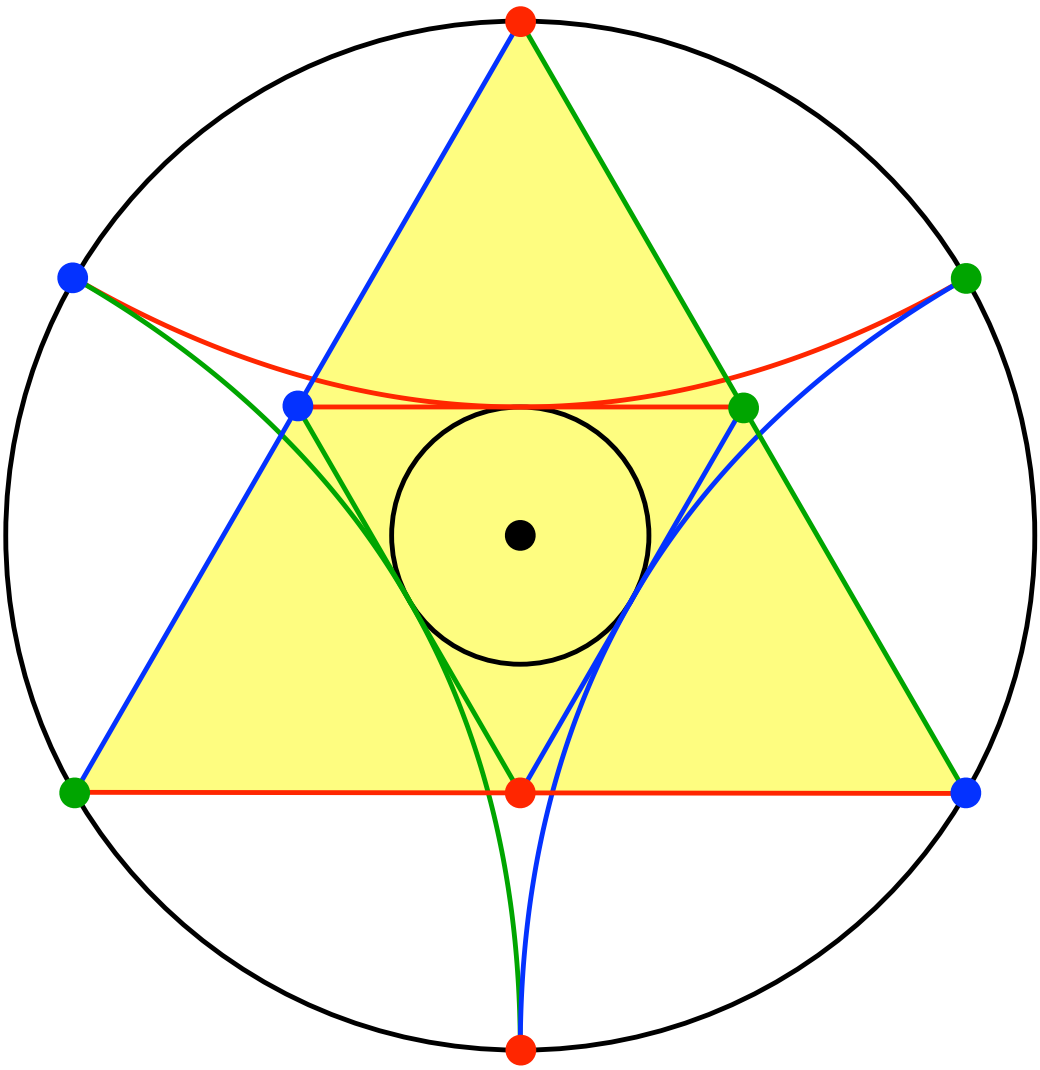

Abb. 9: Kantenmittendreieck

Die Figur kann zu einem Stern mit sechs Spitzen ergänzt werden (Abb. 10).

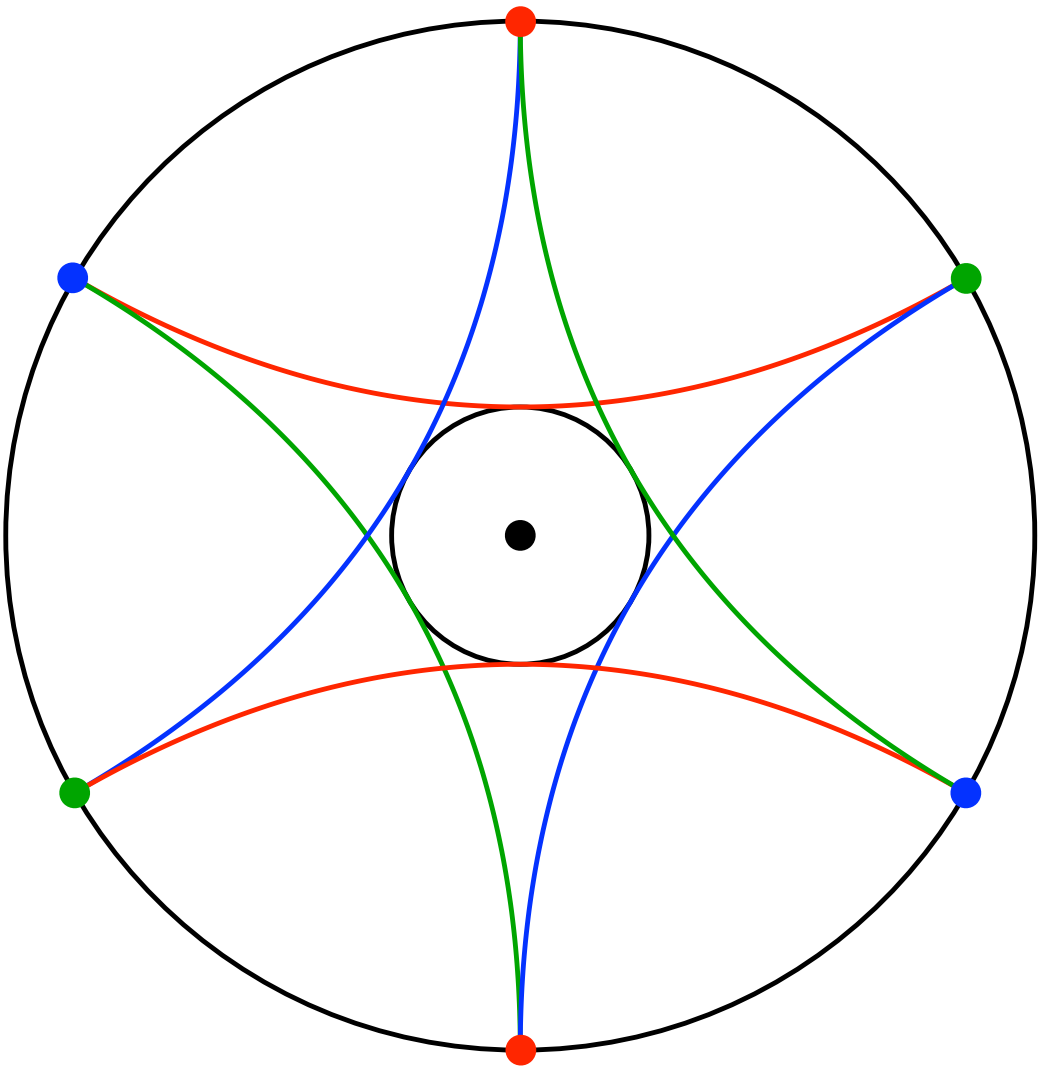

Abb. 10: Stern

Die Abbildung 11 zeigt den Vergleich mit dem Dreispitz von Steiner.

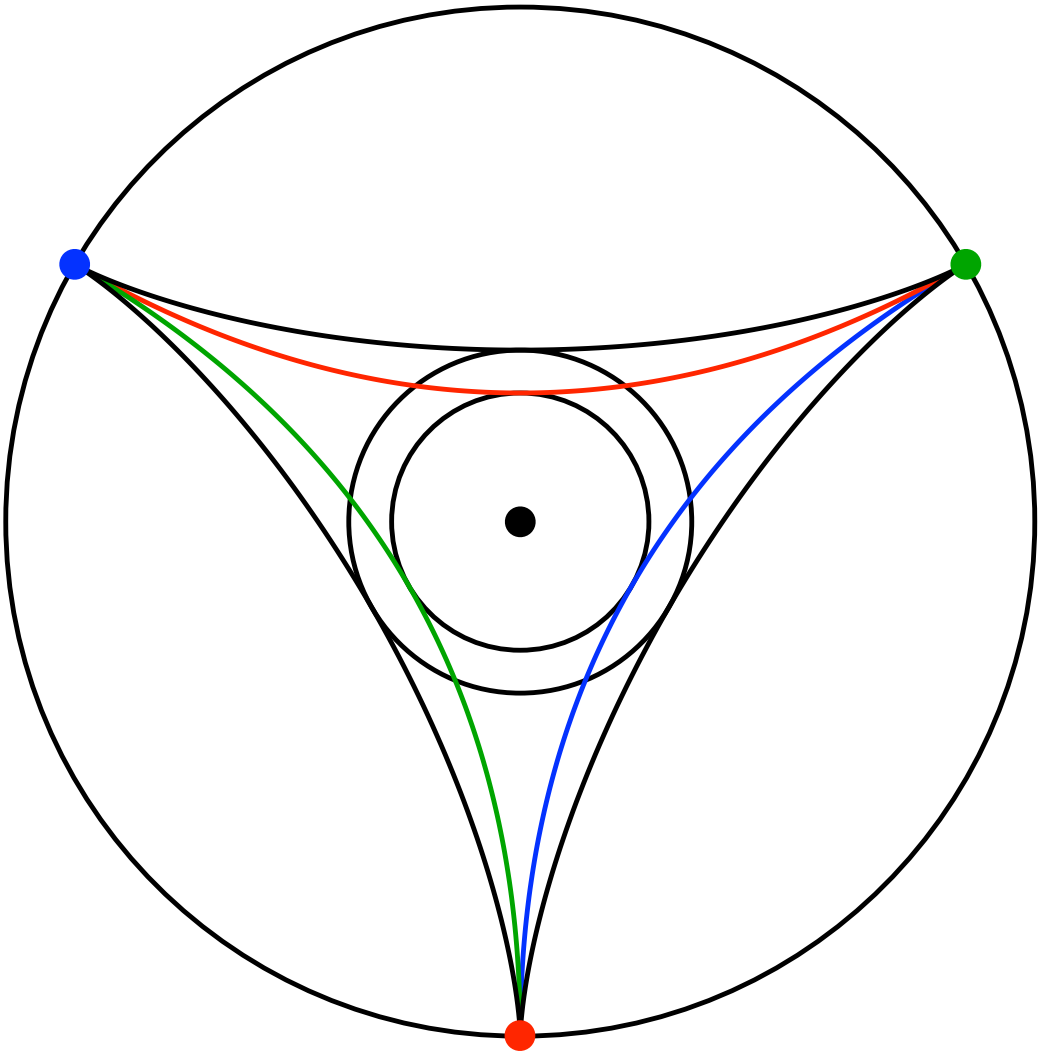

Abb. 11: Dreispitz