Hans Walser, [20180706]

Parabelnormalen

1 Worum geht es?

Von einem beliebigen Punkt A aus sollen die Normalen an eine gegebene Parabel p gelegt werden. Wie viele Lösungen gibt es?

2 Beispiele

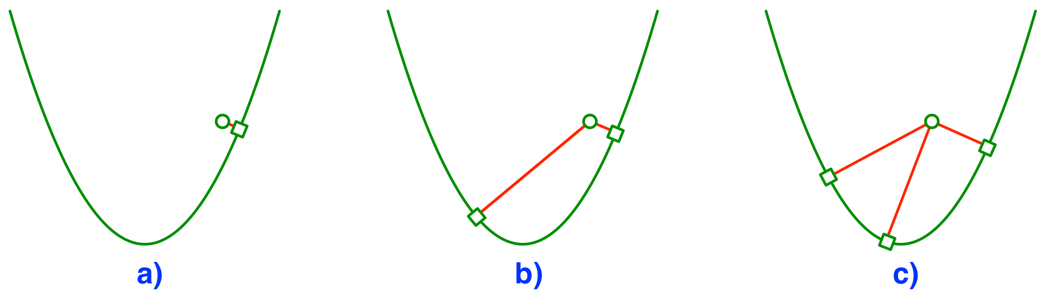


Abb. 1: Ausgangspunkt im Innern der Parabel

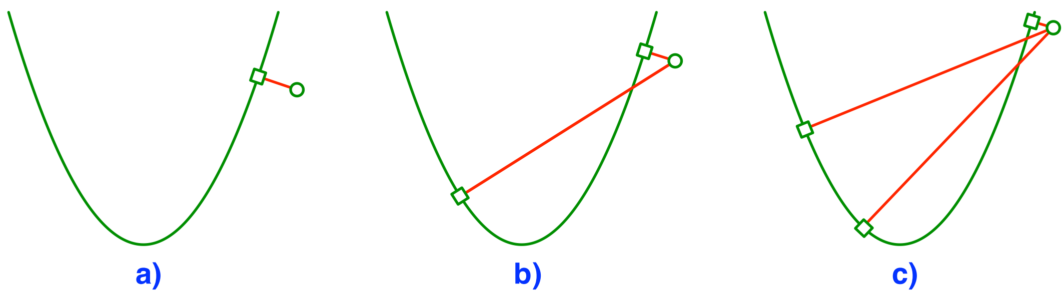


Abb. 2: Ausgangspunkt außerhalb der Parabel

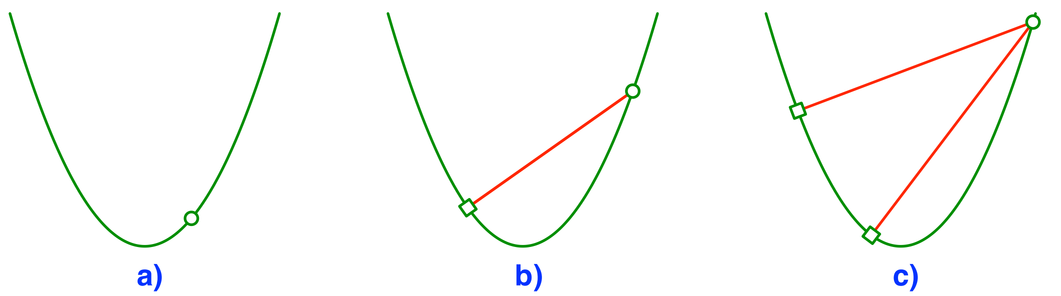


Abb. 3: Ausgangspunkt auf der Parabel

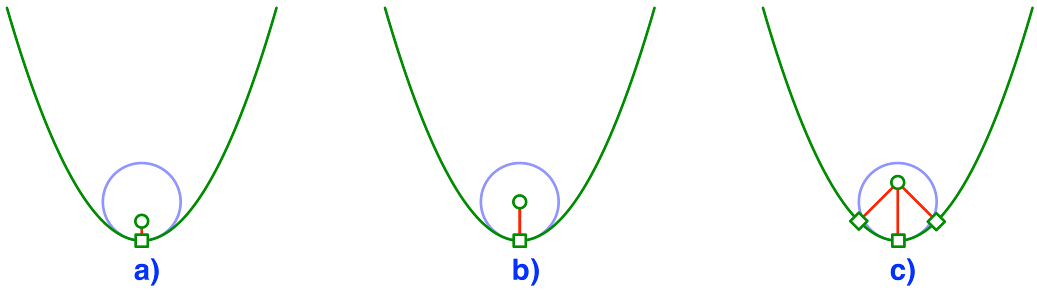


Abb.4: Ausgangspunkt auf der Symmetrieachse

Die Frage ist natürlich, in welchen Fällen für die Lage des Ausgangspunktes A es wie viele Lösungen gibt.

3 Berechnung

Dem Ausgangspunkt A geben wir die Koordinaten $A\left(x_A, y_A\right)$. Weiter sei $P\left(x, x^2\right)$ ein laufender Punkt auf der Standardparabel p.

Für eine von A ausgehende Normale (Lot) auf p muss die Distanz $\overline{AP}$ oder (rechnerisch einfacher) das Quadrat davon extremal sein. Wir haben also die Bedingung:

$$f(x) = \left(x - x_A\right)^2 + \left(x^2 - y_A\right)^2 \stackrel{!}{=} \text{extremal} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich:

$$f'(x) = 2\left(x - x_A\right) + 4x\left(x^2 - y_A\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$

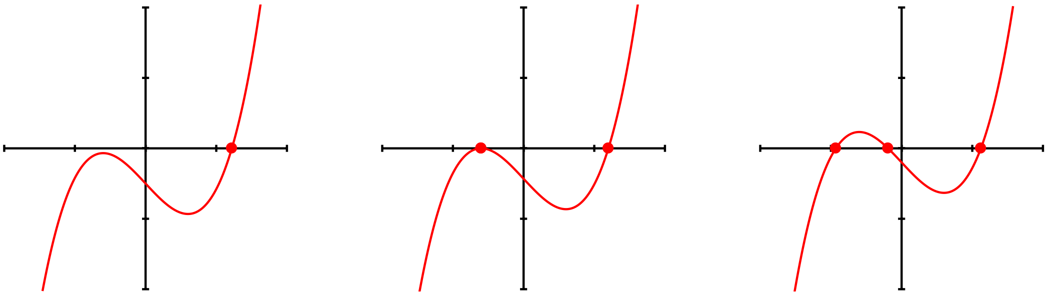
Oder umgeformt:

$$x^3 + x\left(\tfrac{1}{2} - y_A\right) - \tfrac{1}{2}x_A = 0 \tag{3}$$

Wir haben die kubische Gleichung (3) nach x aufzulösen.

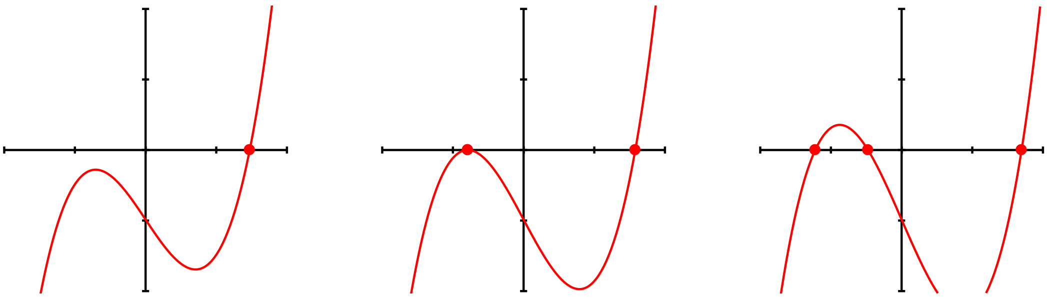
3.1 Beispiele

Die Abbildungen 5 bis 8 zeigen die grafische Auflösung der Gleichung (3) entsprechend den Beispielen der Abbildungen 1 bis 4.



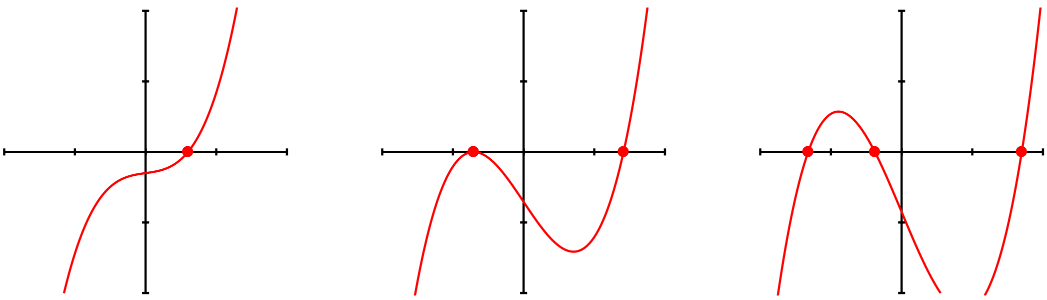
a) b) c)

Abb. 5: Ausgangspunkt im Innern der Parabel



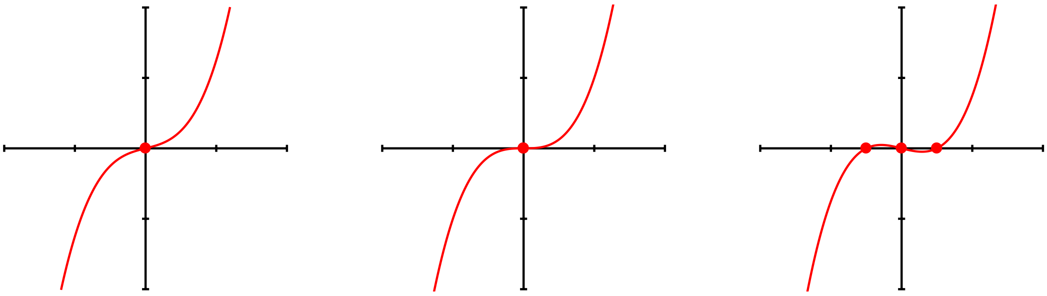
a) b) c)

Abb. 6: Ausgangspunkt außerhalb der Parabel



a) b) c)

Abb. 7: Ausgangspunkt auf der Parabel



a) b) c)

Abb. 8: Ausgangspunkt auf der Symmetrieachse

3.2 Allgemein

Zur Darstellung der Lösungen der allgemeinen Gleichung (3) verwenden wir die sogenannte *Diskriminante D*:

$$D = -48y_A^3 + 81x_A^2 + 72y_A^2 - 36y_A + 6 \tag{4}$$

Weiter führen wir folgende Abkürzungen ein

$$B = \tfrac{1}{6}\left(54x_A + 6\sqrt{-48y_A^3 + 81x_A^2 + 72y_A^2 - 36y_A + 6}\right)^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{6}\left(54x_A + 6\sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{5}$$

sowie:

$$C = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}y_A}{B} \tag{6}$$

Damit können wir die Lösungen von (3) schreiben:

$$\begin{aligned} x_1 &= B - C \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(-B + C) + \mathrm{i}\tfrac{1}{2}\sqrt{3}(B + C) \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}(-B + C) - \mathrm{i}\tfrac{1}{2}\sqrt{3}(B + C) \end{aligned} \tag{7}$$

4 Diskriminante und Evolute

Die Diskriminante D gibt Auskunft über das Lösungsverhalten:

- $D > 0$: Genau eine reelle Lösung (Abbildungen 1a bis 8a)

- $D = 0$: Interessanter Sonderfall (Abbildungen 1b bis 8b). In der Regel zwei Lösungen
- $D < 0$: Drei reelle Lösungen (Abbildungen 1c bis 8c)

Wo liegen die Punkte A mit $D = 0$? Also:

$$D = -48y_A^3 + 81x_A^2 + 72y_A^2 - 36y_A + 6 \overset{!}{=} 0 \qquad (8)$$

Die Abbildung 9 zeigt einen Implicitplot von (8), zusammen mit der Standardparabel p.

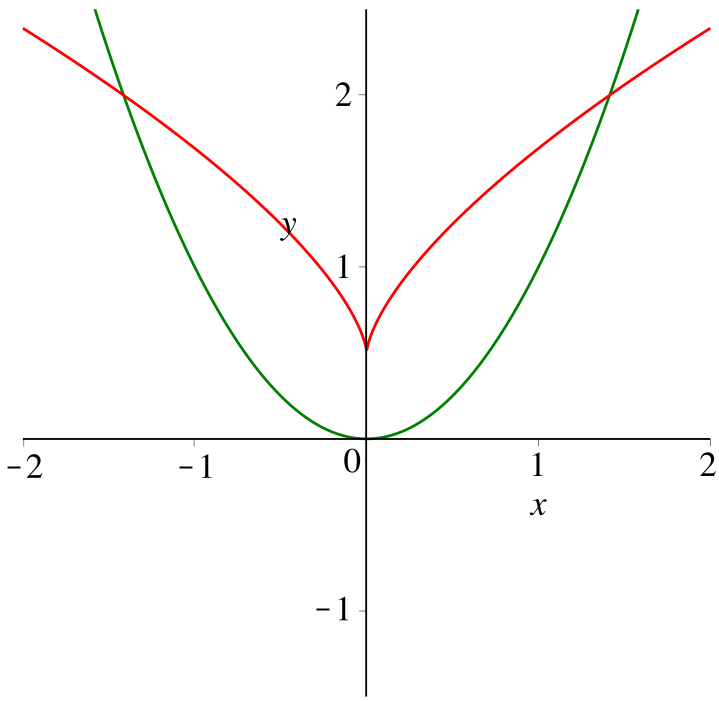


Abb. 9: Diskriminante null

Die rote Kurve ist die Evolute e der Parabel p. Die Evolute e der Standardparabel p hat die Parameterdarstellung:

$$e: \begin{bmatrix} -4t^3 \\ \frac{1}{2} + 3t^2 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Durch Einsetzen in (8) können wir nachweisen, dass wir es tatsächlich mit der Evolute zu tun haben.

Für Ausgangspunkte A oberhalb der Evolute e haben wir eine negative Diskriminante und damit drei Normalen auf die Parabel p.

Für Ausgangspunkte A unterhalb der Evolute e haben wir eine positive Diskriminante und damit genau eine Normale auf die Parabel p.

Die Abbildung 10 zeigt die Niveaulinien der Diskriminante für die Niveaus –200, –180, ... , 180, 200.

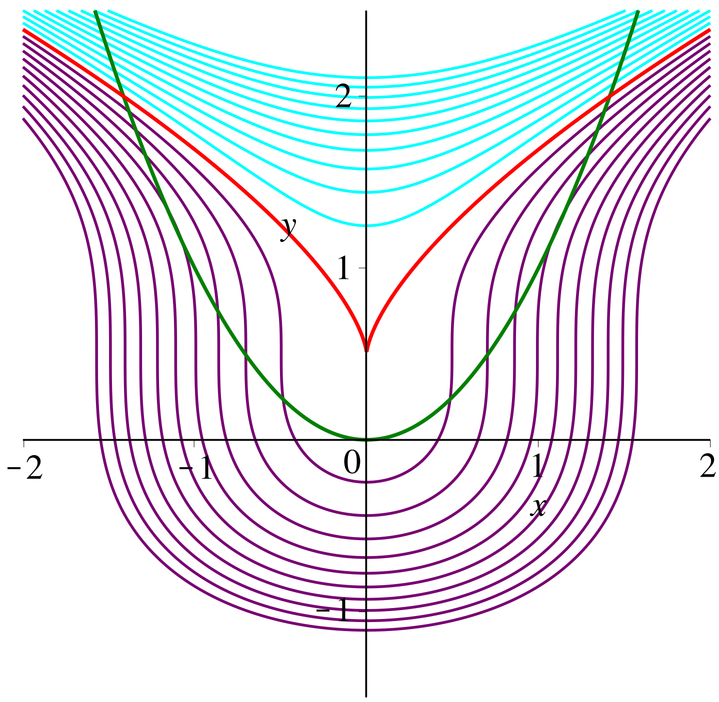


Abb. 10: Niveaulinien

Websites

Hans Walser: Parabel, Evolute und das DIN-Format (abgerufen 07.07.2018):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Parabelevolute_DIN/Parabelevolute_DIN.htm