Hans Walser, [20130729b]

Pythagoras mit Dreiecken

1 Worum es geht

Den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes setzen wir regelmäßige Dreiecke auf (Abb. 1) und suchen eine passende Zerlegung für die Flächengleichheit.

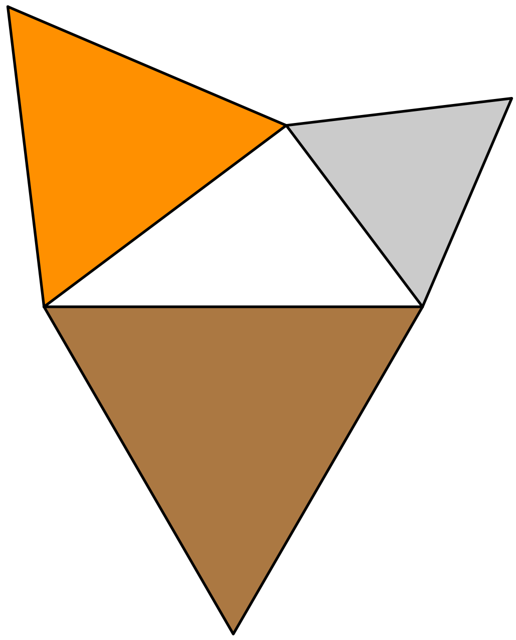

Abb. 1: Grau + Orange = Braun

2 Bezeichnungen

Wir bezeichnen die drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks so, dass $0 < a \leq b < c$. Es ist dann $0 < \alpha \leq \beta < 90°$.

Bei der Farbgebung wurde versucht, mit möglichst wenigen Farben auszukommen, aber doch die Symmetrien möglichst zu wahren.

3 Allgemeiner Fall

Für den allgemeinen Fall müssen wir unterscheiden zwischen $0 < \alpha < 30°$ („kleines" rechtwinkliges Dreieck, Abbildung 2) und $30° < \alpha \leq 45°$ („großes" rechtwinkliges Dreieck, Abbildung 3). Den Übergangsfall $\alpha = 30°$ behandeln wir unter den Sonderfällen.

3.1 Kleines rechtwinkliges Dreieck

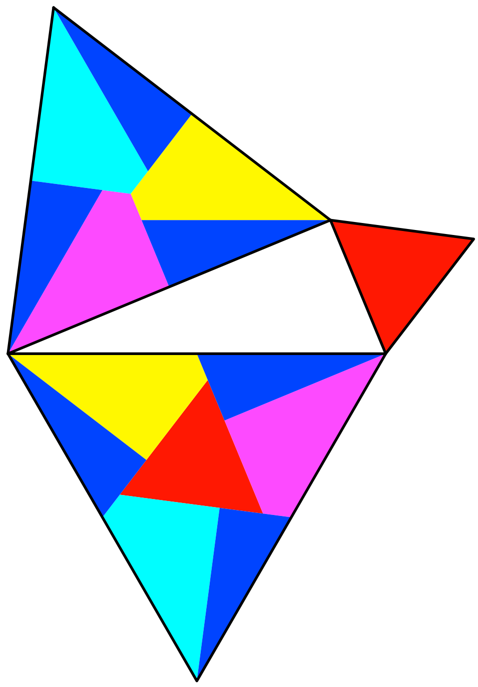

Abb. 2: Kleines rechtwinkliges Dreieck

Wir benötigen insgesamt sieben Puzzle-Teile, aber nur drei verschiedene Formen.

An den inneren Grenzpunkten der Puzzle-Teile kommen immer drei Teile (drei Farben) zusammen.

3.2 Großes rechtwinkliges Dreieck

Für $30° < \alpha \leq 45°$ wird das Dreieck an der Kathete a zu sperrig. Wir müssen Ecken abschneiden.

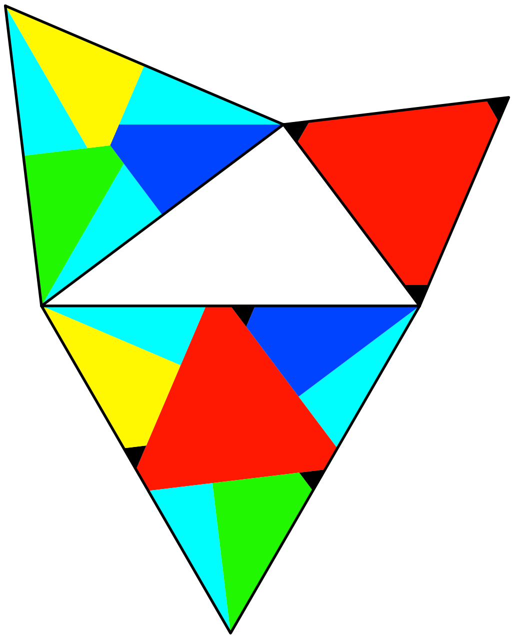

Abb. 3: Großes rechtwinkliges Dreieck

4 Sonderfälle

4.1 Neckischer Fall

Einen neckischen Sonderfall erhalten wir mit $b = \sqrt{12}\,a$ (Abb. 4). Es ist dann $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right) \approx 16.1021°$. Im gleichseitigen Dreieck auf der Hypotenuse c haben wir nur Grenzpunkte, bei denen vier Teile, also auch vier Farben, zusammenkommen.

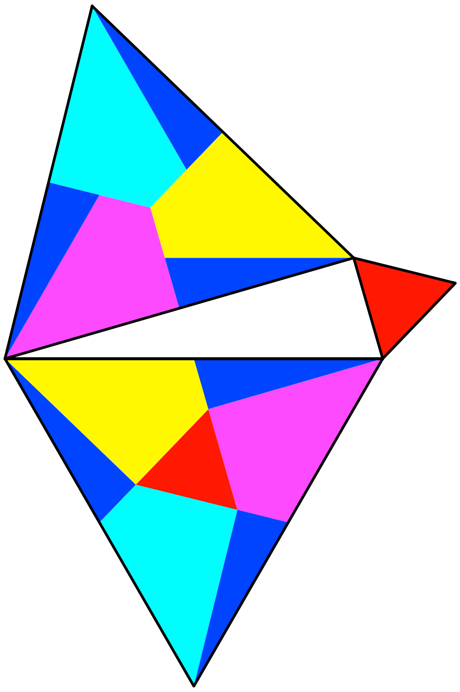

Abb. 4: Neckischer Sonderfall

Dieser Sonderfall erlaubt eine Variante (Abb. 5).

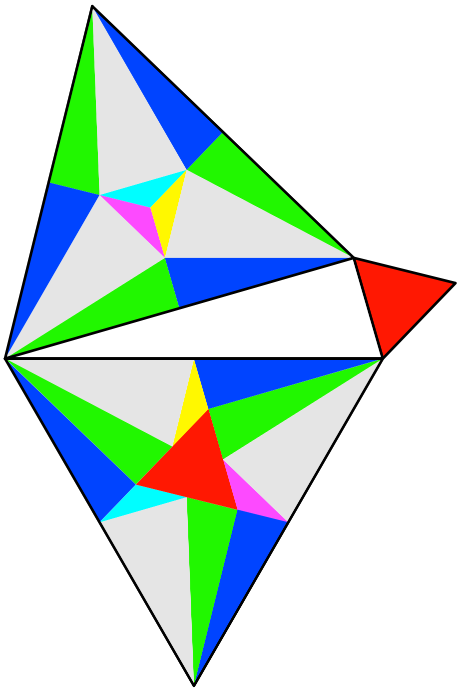

Abb. 5: Variante

4.2 Übergangsfall

Im oben erwähnten Übergangsfall ist $\alpha = 30°$ (Abb. 6). Das rechtwinklige Dreieck ist ein halbes gleichseitiges Dreieck.

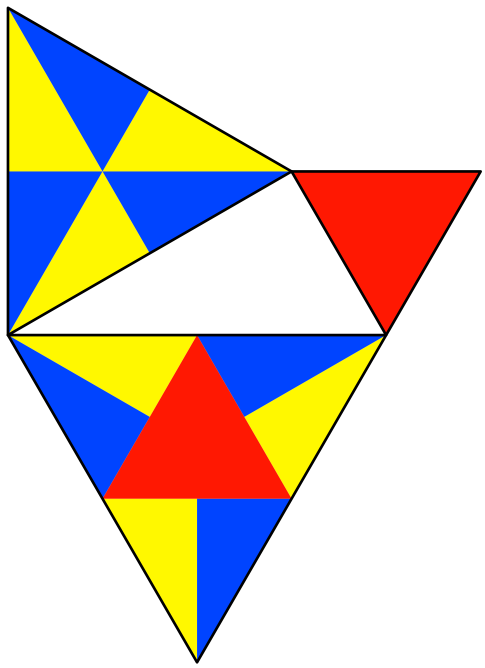

Abb. 6: Übergangsfall

4.3 Halbes DIN-Rechteck

Wir haben ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Seitenverhältnis $a:b:c=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$. Zunächst lässt sich das kleinere Kathetendreieck so in das Hypotenusendreieck einpassen, dass die Seiten des Kathetendreiecks orthogonal zu denen des Hypotnusendreiecks werden (Abb. 7).

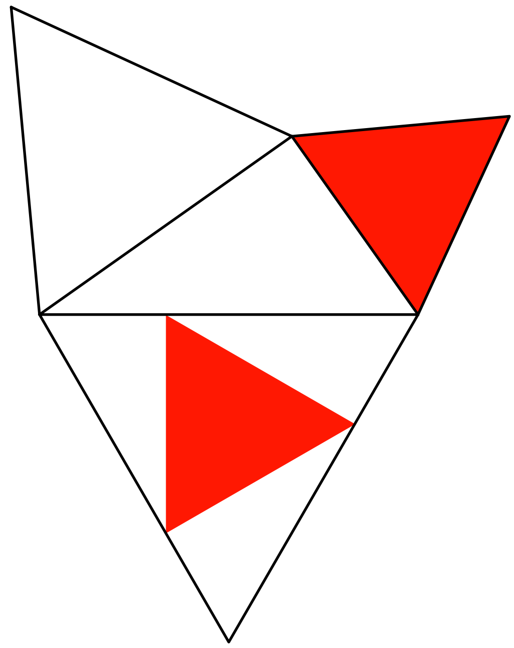

Abb. 7: Einpassen des Kathetendreiecks

Es bleiben drei Dreiecke mit Winkeln 30°-60°-90° übrig. Dafür muss eine schöne gemeinsame Zerlegung mit dem großen Kathetenquadrat gefunden werden, eine Aufgabe, die sich als nicht so einfach erwies. Die Abbildung 8 zeigt eine symmetrische Lösung.

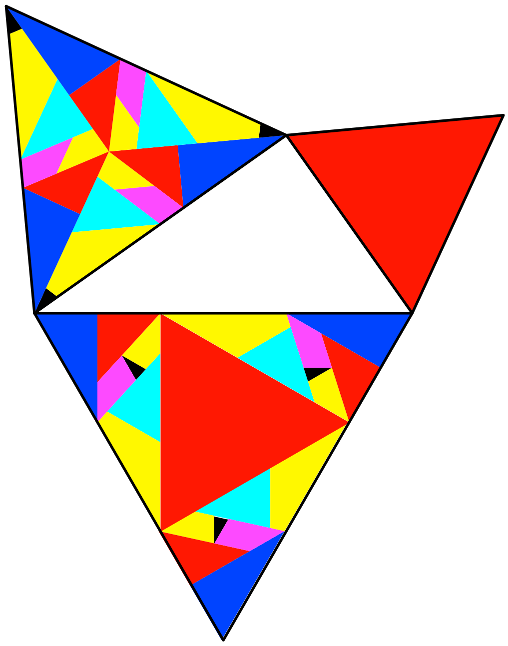

Abb. 8: Symmetrische Lösung

4.4 Pythagoreische Dreiecke

Bei pythagoreischen Dreiecken gibt es immer die Lösung, alle Dreiecke mit einem regulären Dreiecksraster zu füllen. Die Abbildung 9 zeigt dies am Beispiel des Lehrerdreiecks mit dem Seitenverhältnis $a:b:c=3:4:5$. Die Herausforderung besteht nur noch darin, die Farben regelmäßig zu verteilen.

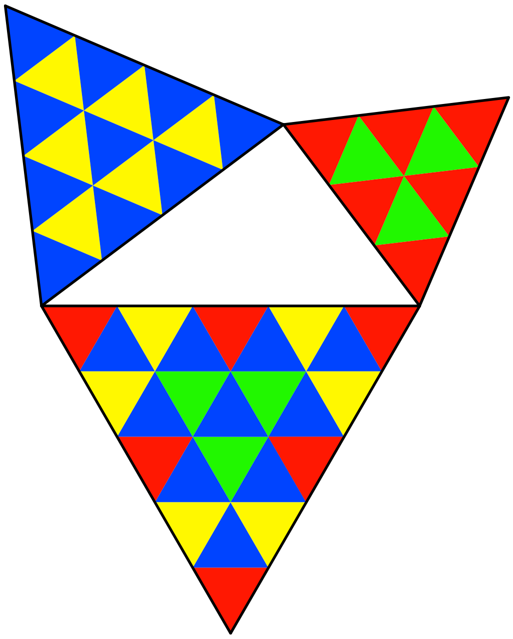

Abb. 9: Pythagoreisches Dreieck

Natürlich können Dreiecke zu größeren Puzzle-Teilen zusammengefasst werden (Abb. 10).

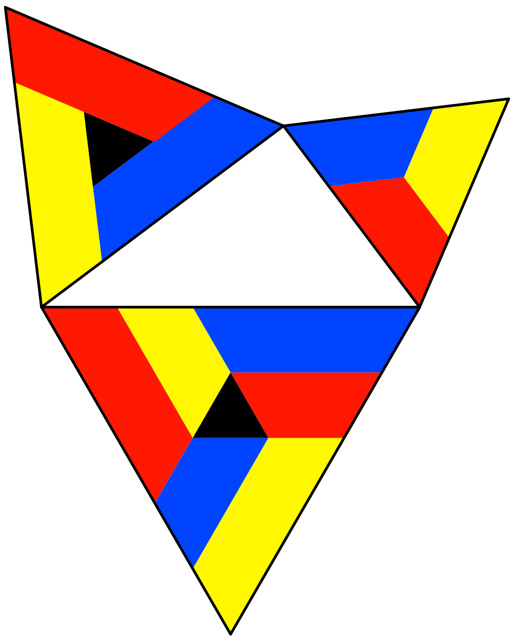

Abb. 10: Größere Puzzle-Teile

Wird auf Symmetrie verzichtet, reichen noch weniger Teile (Abb. 11).

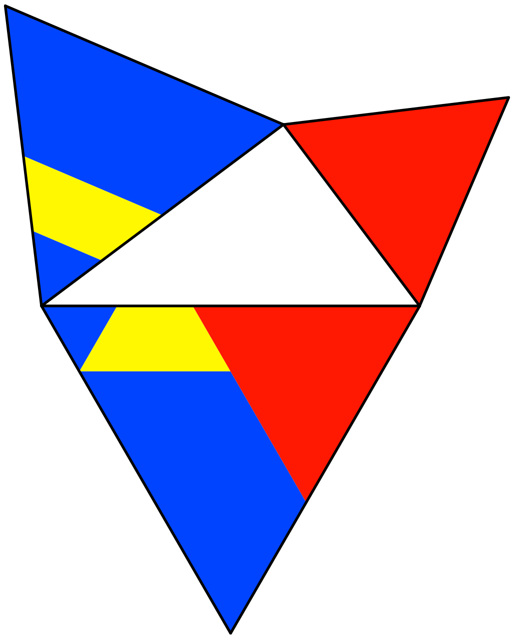

Abb. 11: Ohne Symmetrie

4.5 Gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck

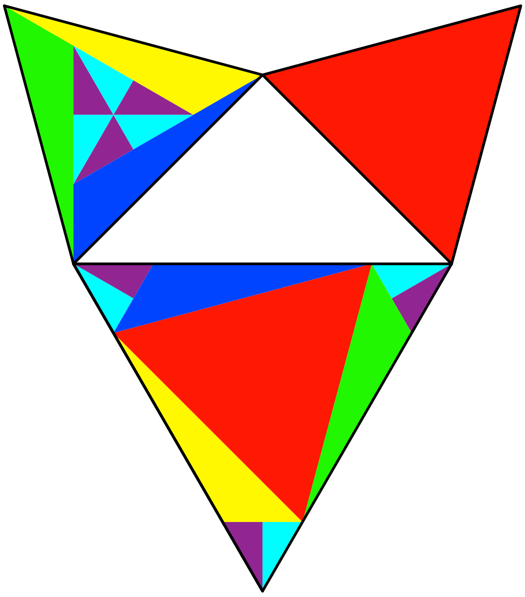

Abb. 12: Rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck