

Hans Walser, [20191124]

Pythagoras-Puzzle

1 Stimmt die Figur?

Aus 17 kongruenten rechtwinkligen Dreiecken (rot in Abb. 1) lässt sich ein größeres Dreieck bauen (gelb in Abb. 1). Ist das große Dreieck rechtwinklig?

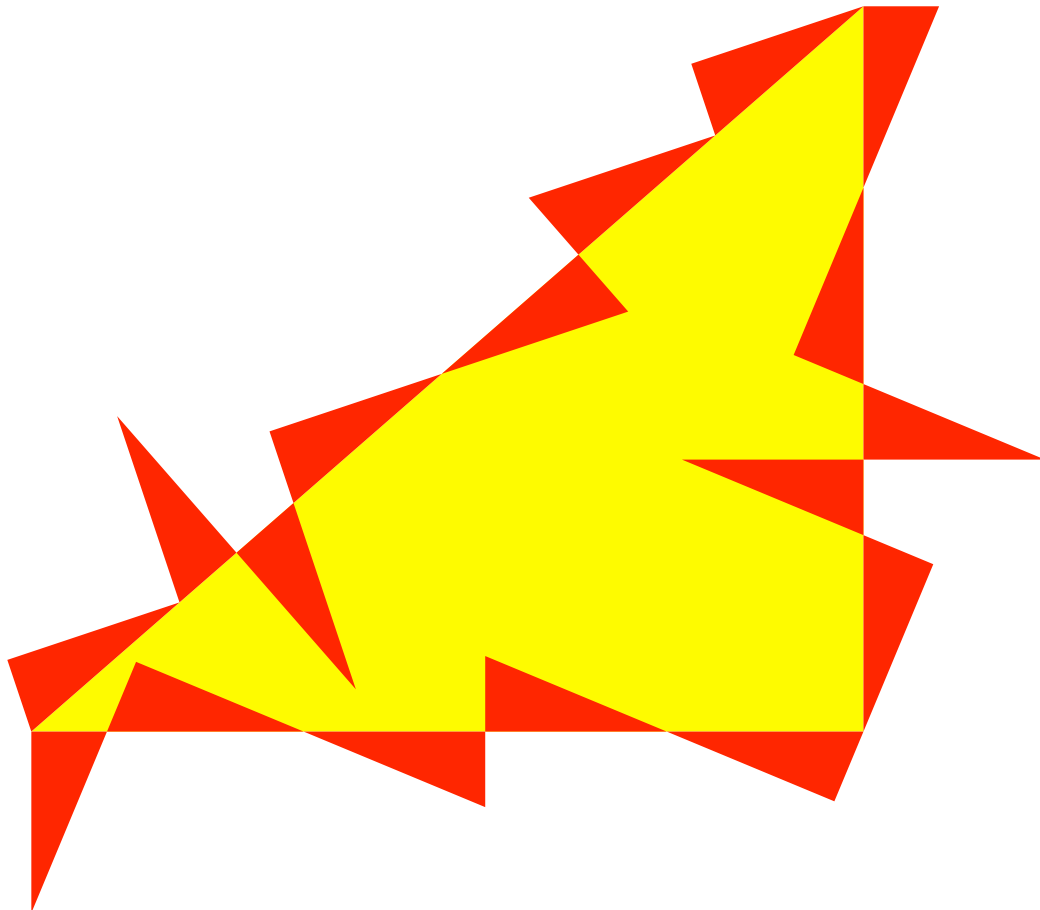


Abb. 1: Stimmt die Figur?

2 Bearbeitung

Das gelbe Dreieck ist ebenfalls rechtwinklig.

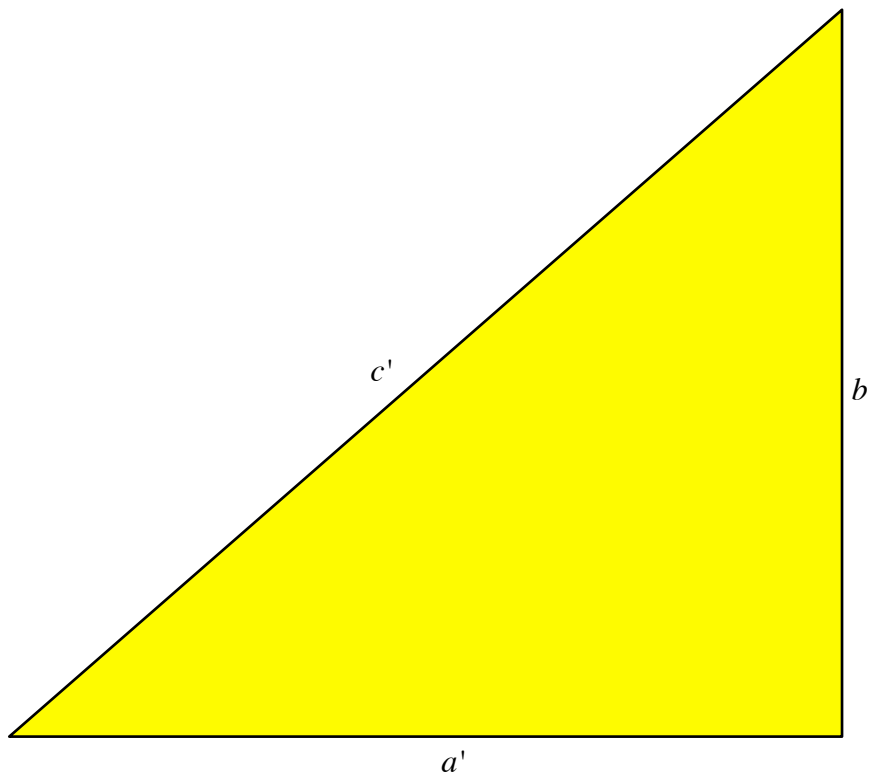
Für den Nachweis verwenden wir bei den roten rechtwinkligen Dreiecken die Standardbezeichnung gemäß Abbildung 2.

**Abb. 2: Bezeichnungen**

Es ist nach Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

Für das gelbe Dreieck verwenden wir die Bezeichnungen der Abbildung 3.

**Abb. 3: Bezeichnungen im gelben Dreieck**

Wir haben zu zeigen:

$$a'^2 + b'^2 = c'^2 \quad (2)$$

Aus der Abbildung 1 lesen wir ab:

$$\begin{aligned}a' &= a + 2b + 2c \\b' &= 2a + b + 2c \\c' &= 2a + 2b + 3c\end{aligned}\tag{3}$$

Zu zeigen ist:

$$(a + 2b + 2c)^2 + (2a + b + 2c)^2 = (2a + 2b + 3c)^2\tag{4}$$

Für die linke Seite L von (4) erhalten wir:

$$\begin{aligned}L &= (a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4ab + 4ac + 8bc) + (4a^2 + b^2 + 4c^2 + 4ab + 8ac + 4bc) \\&= 5a^2 + 5b^2 + 8c^2 + 8ab + 12ac + 12bc\end{aligned}\tag{5}$$

Wegen (1) ist schließlich:

$$L = 13c^2 + 8ab + 12ac + 12bc\tag{6}$$

Für die rechte Seite R von (4) ergibt sich:

$$R = 4a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 8ab + 12ac + 12bc\tag{7}$$

Wegen (1) ist damit:

$$R = 13c^2 + 8ab + 12ac + 12bc\tag{8}$$

Es ist $L = R$. Dies war zu zeigen.