Hans Walser, [20170826]

Quadratunterteilung

1 Gleichmäßig wachsende Seitenlängen

Wir beginnen mit einer diagonal angeordneten Folge von Quadraten mit den Seitenlängen 1, 2, ... , 10. (Abb. 1).

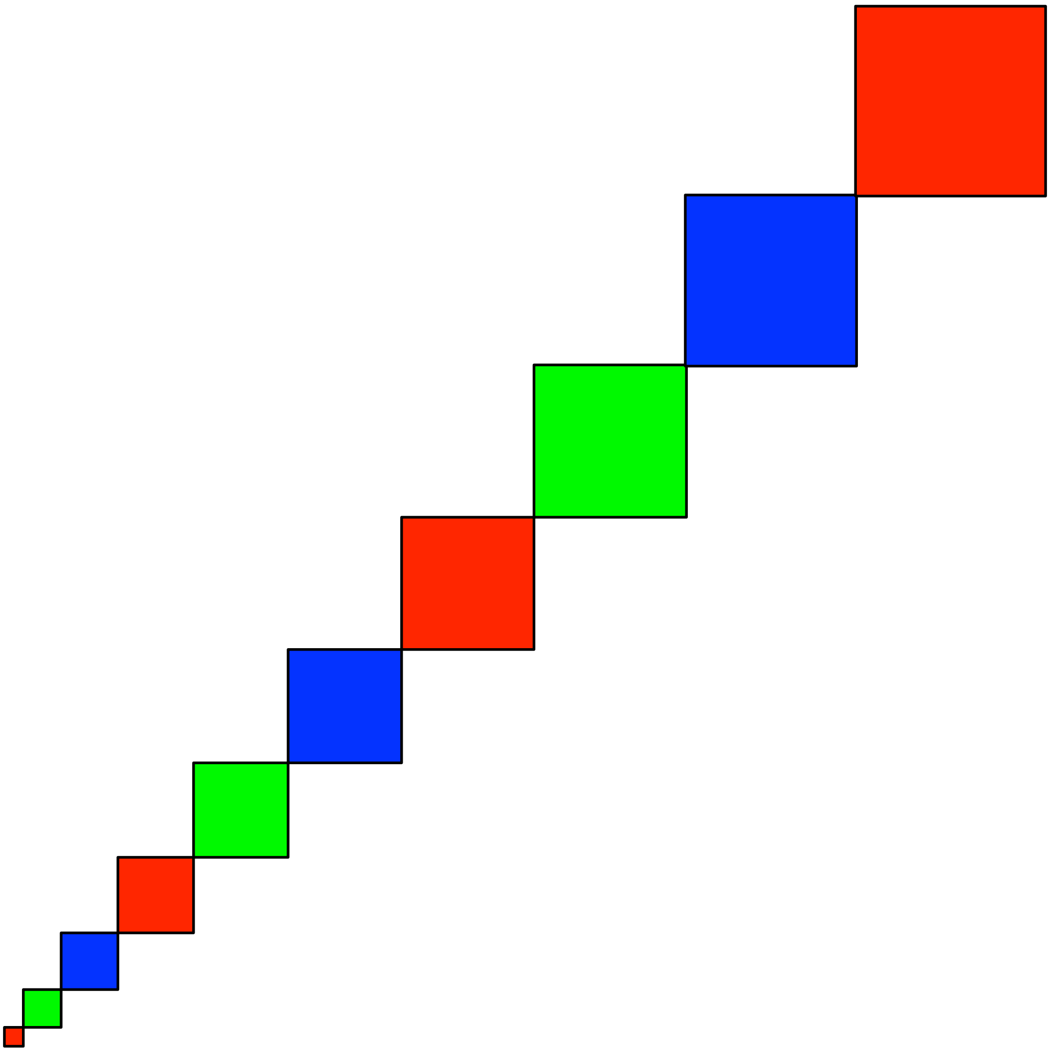

Abb. 1: Quadratfolge

Wir ergänzen die Figur zu einem großen Quadrat (Abb. 2). So entsteht ein Rechtecksraster.

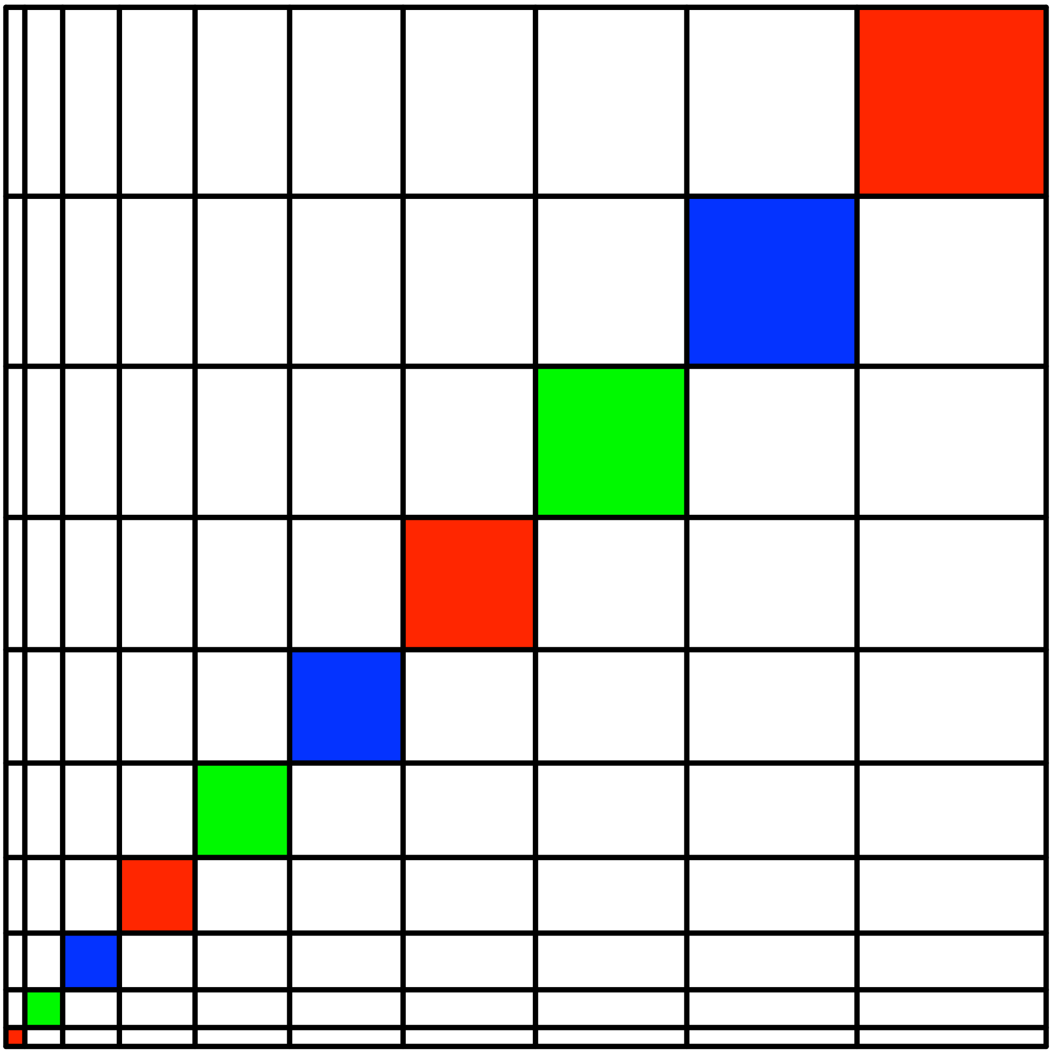

Abb. 2: Rechtecksraster

Zwischenbemerkung: In der Tabelle 1 sind die Flächeninhalte der Rechtecke in gleicher Anordnung wie in der Abbildung 2 eingetragen. Das haben wir schon einmal gesehen.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tab. 1: Flächeninhalte

In der Abbildung 3 ist eine Art „Diagonale“ von links oben nach rechts unten eingetragen. Was für eine Kurve ist das?

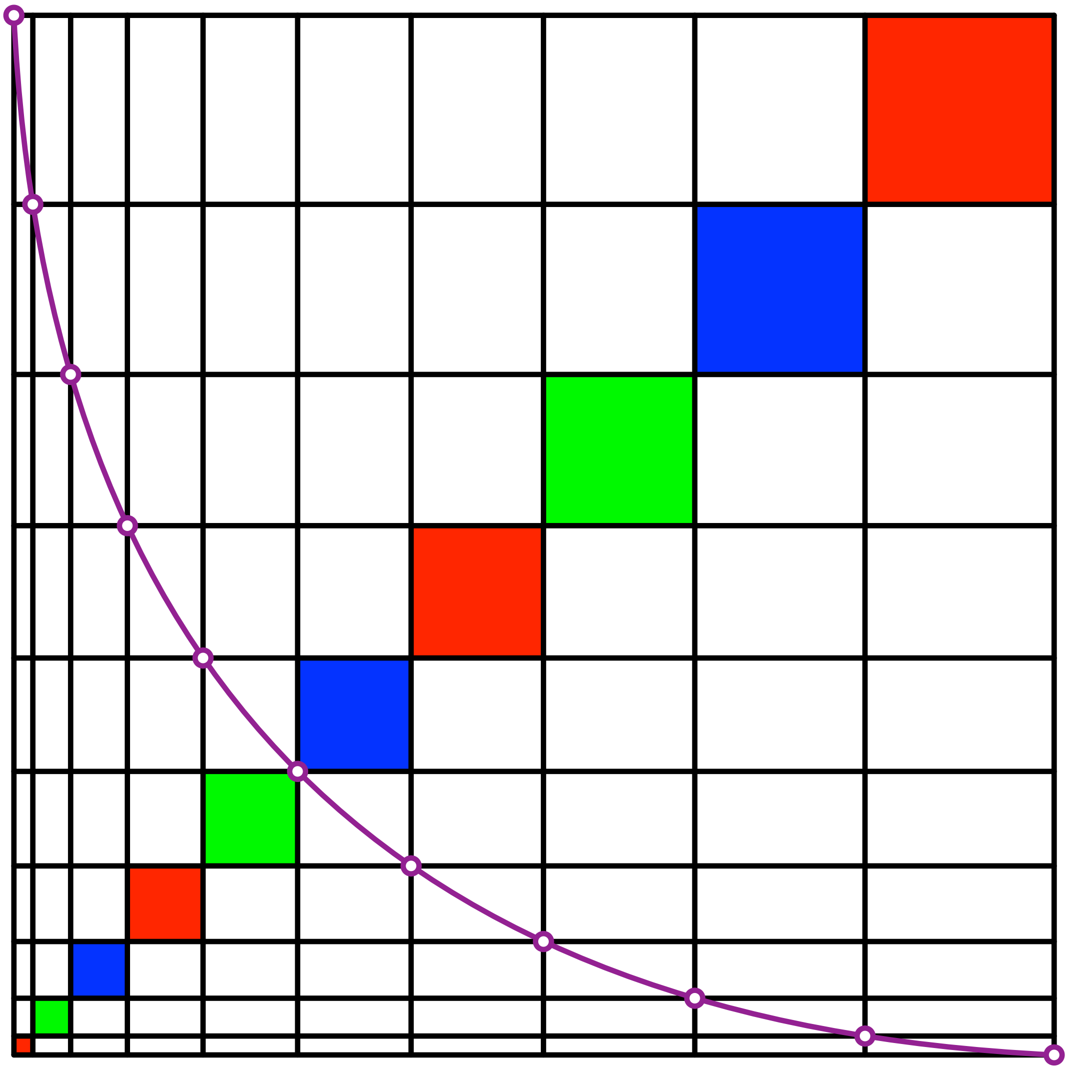

Abb. 3: Diagonale

Wir arbeiten zunächst im *x,y*-Koordinatensystem mit dem Ursprung in der linken unteren Ecke des großen Quadrates und der Seitenlänge des kleinsten roten Quadrates als Einheit. In diesem Koordinatensystem hat die Kurve die implizite Gleichung:

$$(x-y)^2-121(x+y)+3630=0 \tag{1}$$

Mit der Koordinatentransformation

$$u = x - y, \quad v = x + y \tag{2}$$

erhalten wir die Parabelgleichung:

$$v = \tfrac{1}{121}u^2 + 30 \tag{3}$$

Nun unterteilen wir jedes Rechteck der Abbildung 2 in möglichst wenige Quadrate (Abb. 4).

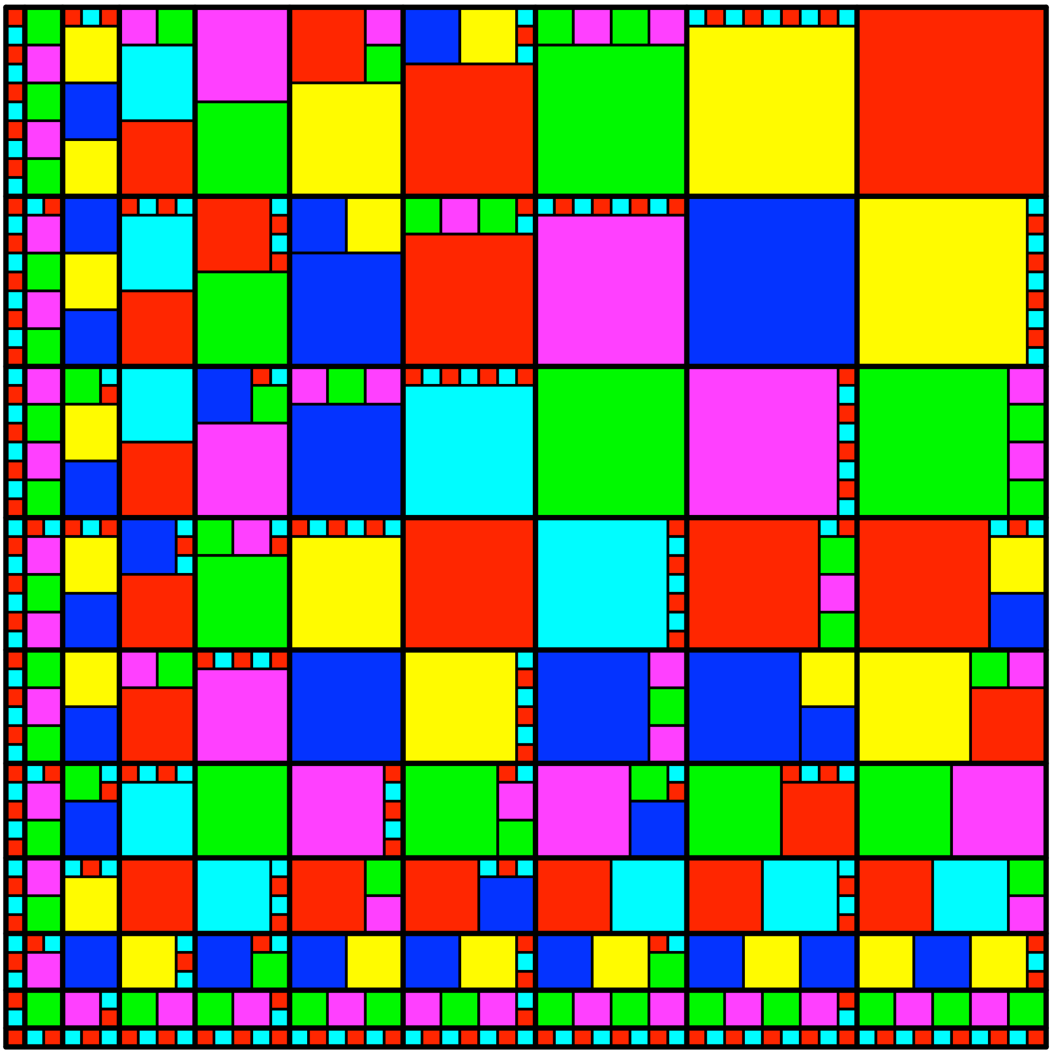

Abb. 4: Unterteilung in Quadrate

In der Tabelle 2 sind die Anzahlen der zur Unterteilung eines Rechtecks benötigten Quadrate eingetragen.

10	5	6	4	2	4	6	5	10	1
9	6	3	6	6	3	6	9	1	10
8	4	5	2	5	4	8	1	9	5
7	5	5	5	5	7	1	8	6	6
6	3	2	3	6	1	7	4	3	4
5	4	4	5	1	6	5	5	6	2
4	2	4	1	5	3	5	2	6	4
3	3	1	4	4	2	5	5	3	6
2	1	3	2	4	3	5	4	6	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tab. 2: Anzahl der benötigten Quadrate zur Unterteilung

Lesebeispiel: Zur Unterteilung eines Rechteckes der Länge 7 und der Höhe 4 benötigen wir 5 Quadrate (Abb. 5).

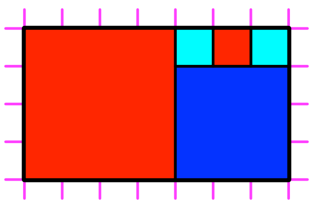

Abb. 5: Lesebeispiel

Berechnen tun wir das so:

$$\begin{aligned} 7:4 &= 1 \quad \text{Rest } 3 \\ 4:3 &= 1 \quad \text{Rest } 1 \\ 3:1 &= 3 \quad \text{Rest } 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Dies ist zunächst der Euklidische Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers der beiden Zahlen 7 und 4. Dieser größte gemeinsame Teiler ist der letzte von null verschiedene Rest, in unserem Falle 1. Uns interessiert das aber gar nicht. Wir addieren vielmehr die in (4) rot und blau angegebenen Zahlen. Diese Summe ist die Anzahl der benötigten Quadrate zur Unterteilung des Rechteckes der Länge 7 und der Höhe 4. Der Zusammenhang mit der Abbildung 5 ist offensichtlich.

Die allgemeine Prozedur für ein Rechteck der Läng m und der Höhe n sieht so aus:

```
AnzahlQuadrate:=proc(m,n)
 local s,q,r,a,b,k:
 s:=0:
 q:=0:
 r:=1:
 a:=m:
 b:=n:
 for k from 0 while r > 0 do
  q:=floor(a/b):
  s:=s+q:
  r:= a mod b:
  a:=b:
  b:=r:
 end:
 return s:
end:
```

Die Abbildung 6 gibt ein Histogramm für die Tabelle 2.

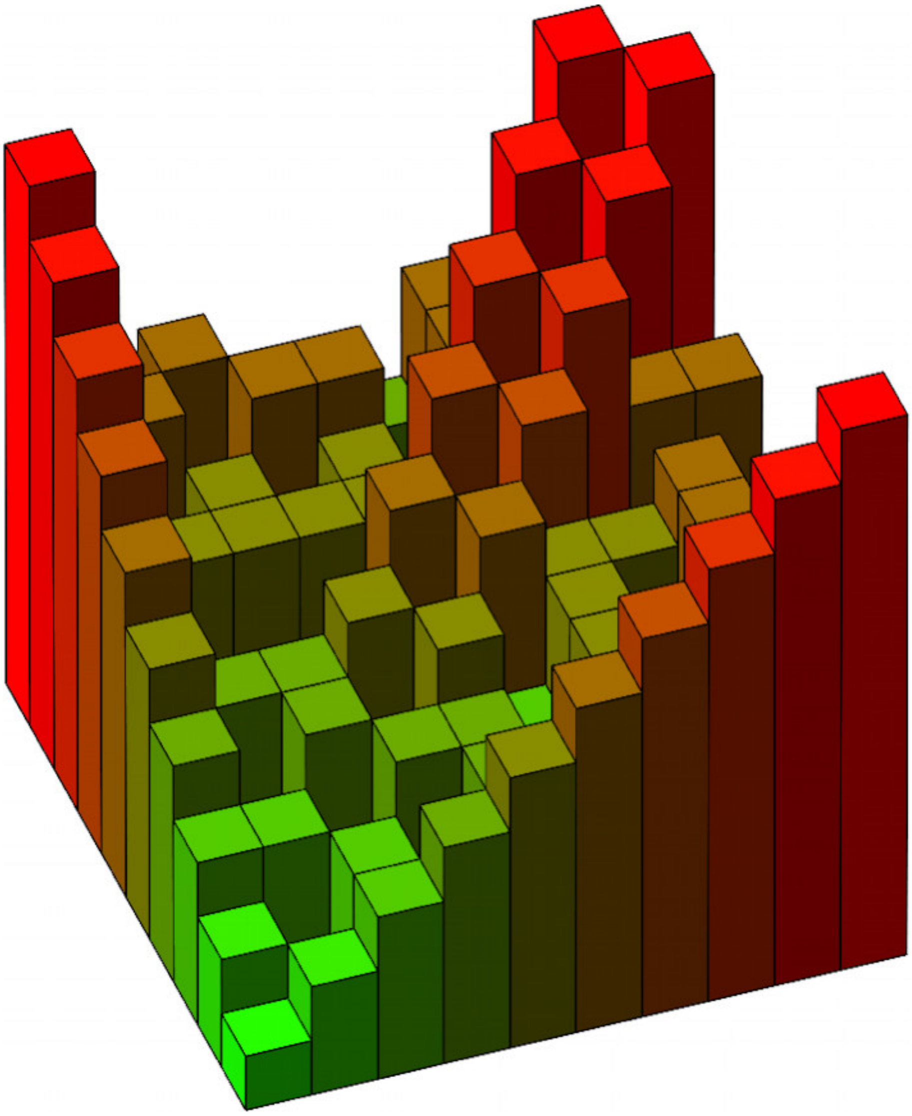

Abb. 6: Histogramm

Ein Zahlendreieck: Wir schreiben die obere linke Hälfte der Tabelle in einer anderen Anordnung und ergänzen am linken Rand mit Einsen (Tab. 3).

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	2	4	1						
1	5	4	4	5	1					
1	6	3	2	3	6	1				
1	7	5	5	5	5	7	1			
1	8	4	5	2	5	4	8	1		
1	9	6	3	6	6	3	6	9	1	
1	10	5	6	4	2	4	6	5	10	1

Tab. 3: Zahlendreieck

Es handelt sich hier um das Zahlendreieck A110570.

2 Fibonacci-Quadrate

Die Startquadrate haben die Fibonacci-Zahlen als Seitenlängen (Abb. 7).

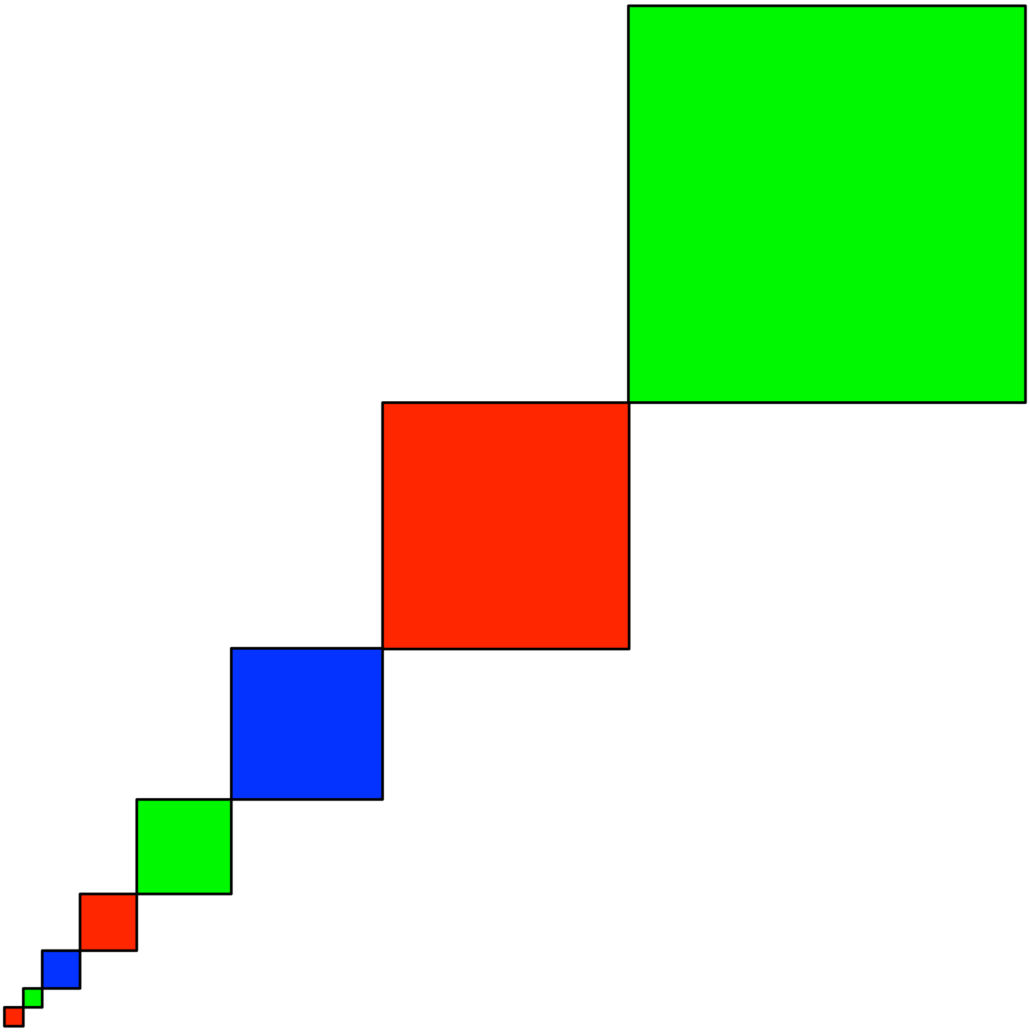

Abb. 7: Fibonacci-Quadrate

Die Fibonacci-Rekursion kann geometrisch gezeigt werden (Abb. 8).

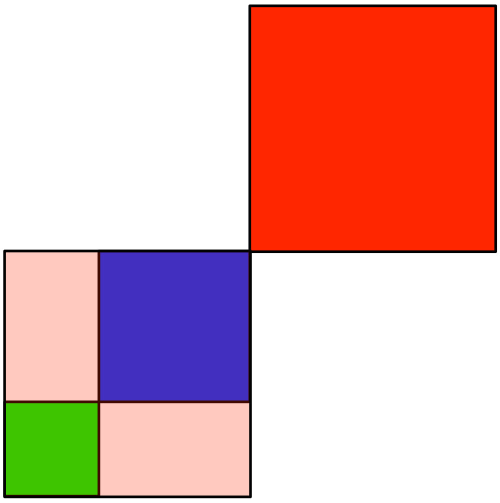

Abb. 8: Fibonacci-Rekursion

Wir ergänzen die Abbildung 7 zum Rechtecksraster (Abb. 9).

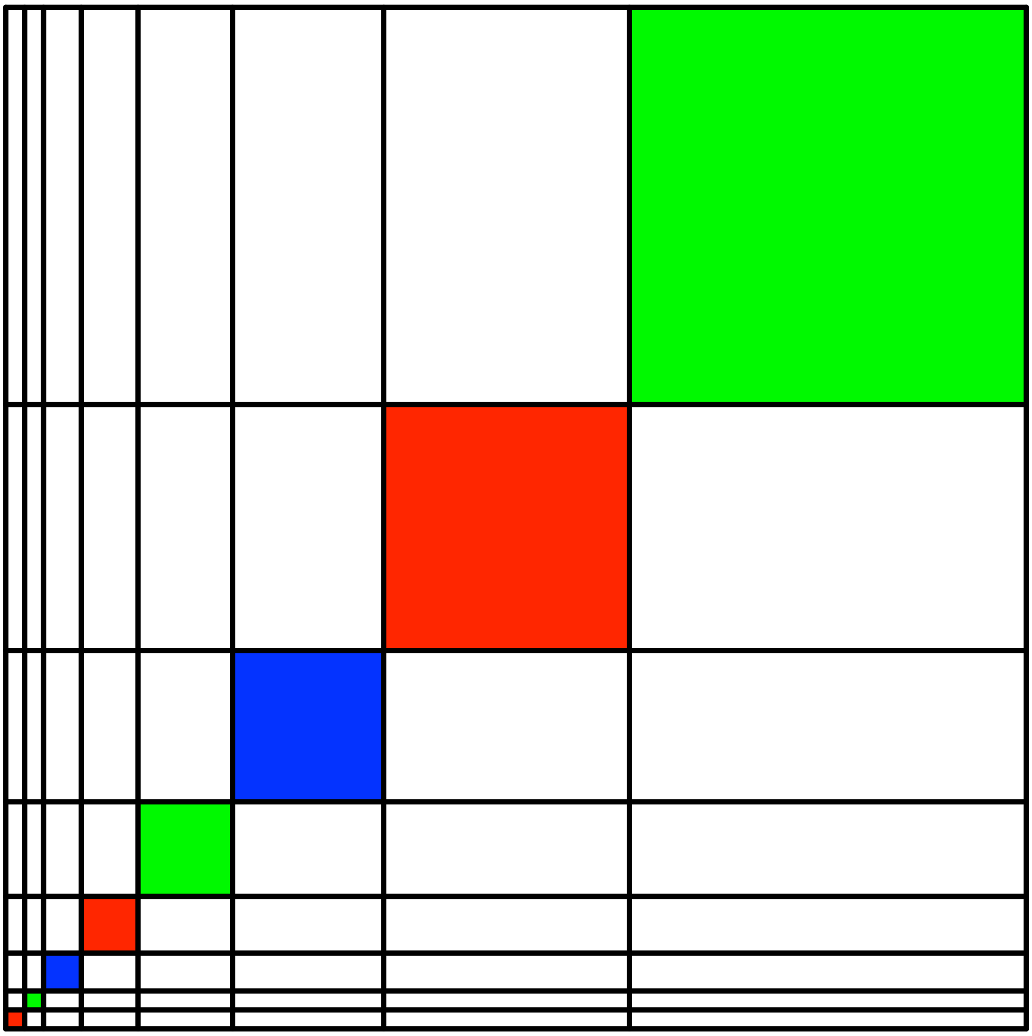

Abb. 9: Rechtecksraster

Die Tabelle 4 gibt die Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke.

21	21	42	63	105	168	273	441
13	13	26	39	65	104	169	273
8	8	16	24	40	64	104	168
5	5	10	15	25	40	65	105
3	3	6	9	15	24	39	63
2	2	4	6	10	16	26	42
1	1	2	3	5	8	13	21
1	1	2	3	5	8	13	21

Tab. 4: Flächeninhalte

In der Abbildung 10 sind die Rechtecke in Quadrate zerlegt.

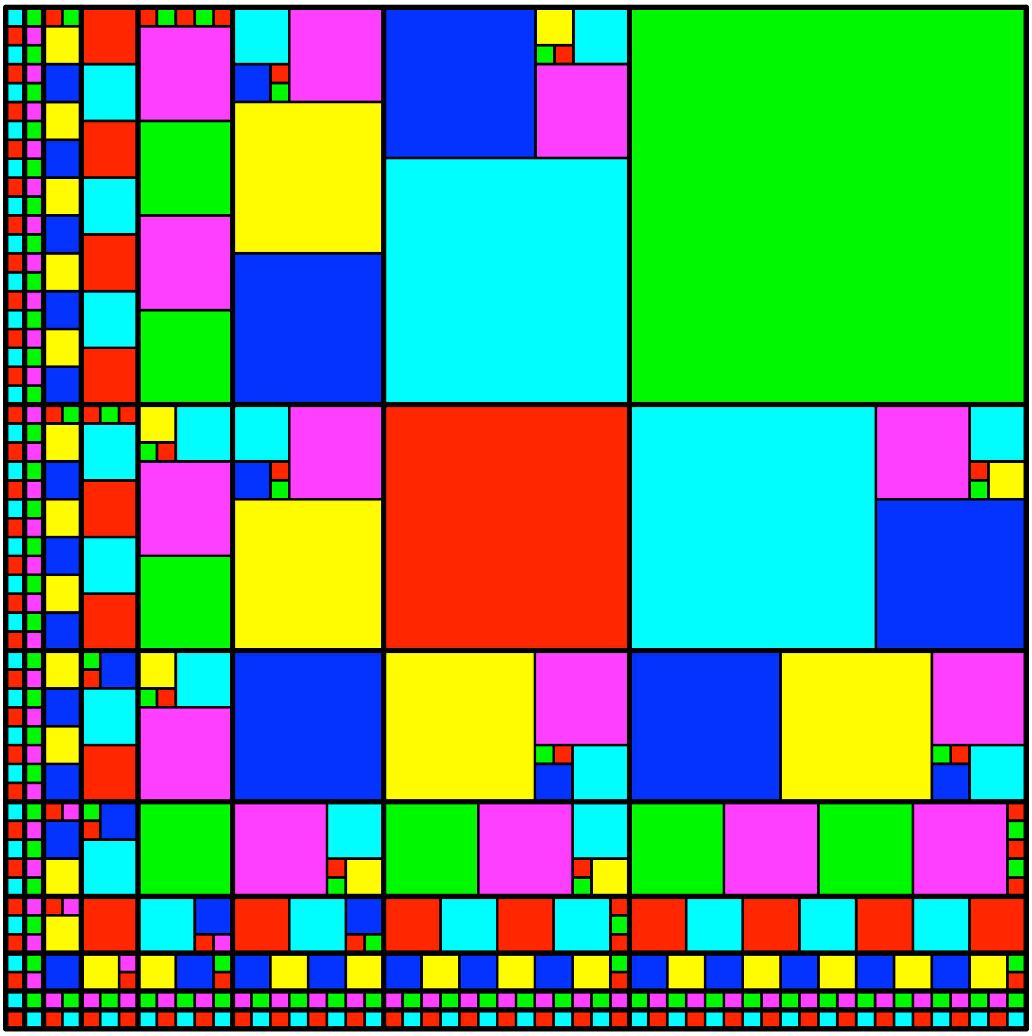

Abb. 10: Zerlegung in Quadrate

Die Tabelle 5 gibt die Anzahlen der für die Zerlegung der einzelnen Rechtecke benötigten Quadrate.

21	21	12	7	9	7	7	1
13	13	8	7	6	6	1	7
8	8	4	5	5	1	6	7
5	5	4	4	1	5	6	9
3	3	3	1	4	5	7	7
2	2	1	3	4	4	8	12
1	1	2	3	5	8	13	21
1	1	2	3	5	8	13	21

Tab. 5: Anzahl der benötigten Quadrate zur Unterteilung

Websites

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®) (abgerufen 26.08.2017):
https://oeis.org/A110570