Hans Walser, [20190120]

Raster-Rechtecke

Anregung: B. W., K.

1 Worum geht es

Im Quadratraster werden ein rotes und ein blaues $a \times b$-Raster-Rechteck so ausgelegt dass sie mindestens ein Rasterquadrat gemeinsam haben.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn Position und Ausrichtung keine Rolle spielen?

Die Bearbeitung ist eine Orgie in Fallunterscheidungen und induktivem Denken.

2 Fallunterscheidungen

2.1 „Echte" Rechtecke

Die beiden Zahlen a und b sind ungleich. Wir nehmen $a > b$ an. Die Überlegungen gelten aber auch für $a < b$.

2.1.1 Gleiche Parität

Es ist $\mathrm{mod}(a-b, 2) = 0$.

2.1.1.1 Beide Rechtecke im Querformat

Die Abbildung 1 zeigt eine Auslegeordnung für den einfachsten Fall $a = 3$ und $b = 1$. Außer dem mittleren Beispiel erscheint jedes Beispiel doppelt.

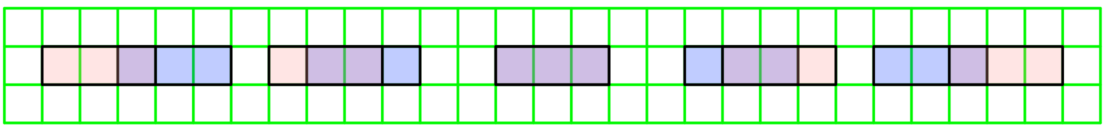

Abb. 1: a = 3, b =1

Die Abbildung 2 zeigt die Situation für den Fall $a = 4$ und $b = 2$.

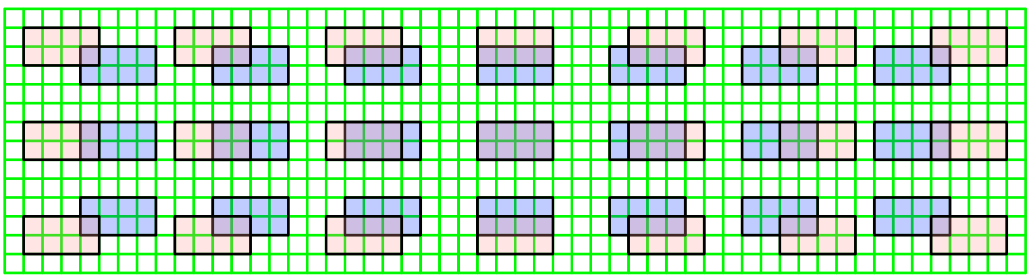

Abb.2: a = 4, b = 2

Wir haben jeweils eine rechteckige Anordnung mit den Dimensionen $2a-1$ und $2b-1$, beides ungerade Zahlen. Dies gilt auch, wenn wir a oder b je um eine gerade Zahl erhöhen. Punktsymmetrisch liegende Beispiele sind gleich. Das mittlere Beispiel kommt nur einmal vor. Für die Gesamtzahl # erhalten wir daher:

$$\# = \tfrac{1}{2}\left(2a-1\right)\left(2b-1\right)+\tfrac{1}{2} \tag{1}$$

2.1.1.2 Querformat und Hochformat

Die Abbildung 3 zeigt eine Auslegeordnung für den einfachsten Fall a = 3 und b = 1. Außer dem mittleren Beispiel erscheint jedes Beispiel doppelt.

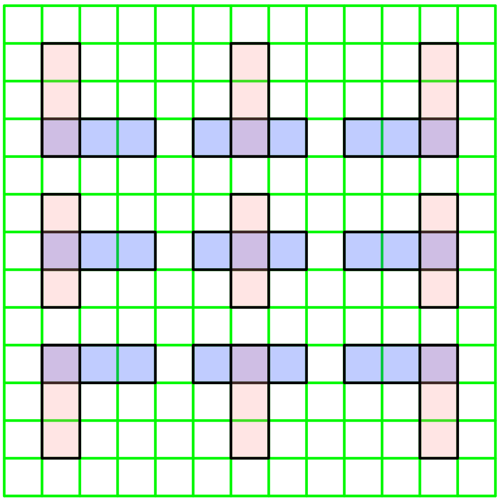

Abb. 3: Einfachster Fall

Die Abbildung 4 zeigt eine Auslegeordnung für den Fall $a = 4$ und $b = 2$. Außer dem mittleren Beispiel erscheint jedes Beispiel doppelt.

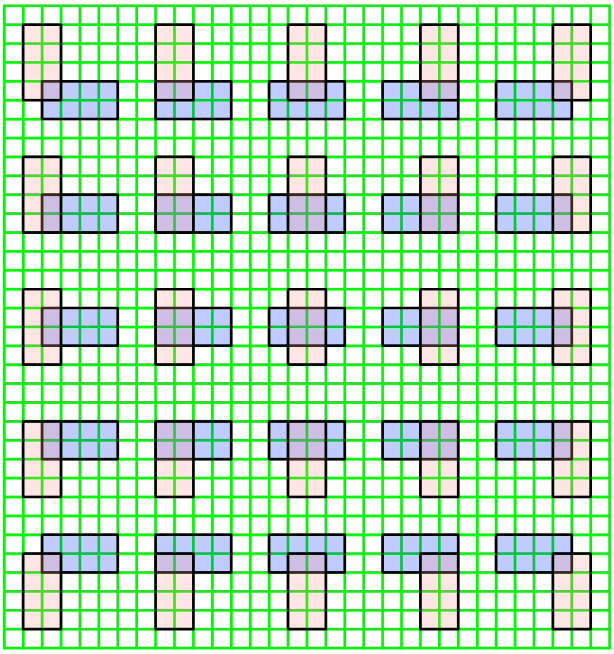

Abb.4: *a* = 4, *b* = 2

Wir haben jeweils eine quadratische Anordnung der Seitenläng $a + b - 1$, eine ungerade Zahl. Die Situation bleibt sich gleich, wenn wir a und b je um eine gerade Zahl erhöhen. Punktsymmetrisch liegende Beispiele sind gleich. Das mittlere Beispiel kommt nur einmal vor. Für die Gesamtzahl # erhalten wir daher:

$$\# = \tfrac{1}{2}(a+b-1)^2 + \tfrac{1}{2} \tag{2}$$

Bei gleicher Parität von a und b erhalten wir also aus (1) und (2) insgesamt:

$$\# = \tfrac{1}{2}(2a-1)(2b-1) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(a+b-1)^2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\left((a+b)^2 + 4(a-1)(b-1)\right) \tag{3}$$

2.1.2 Ungleiche Parität

Es ist $\mathrm{mod}(a - b\,, 2) = 1$.

2.1.2.1 Beide Rechtecke im Querformat

Die Abbildung 5 zeigt den einfachsten Fall $a = 2$ und $b = 1$.

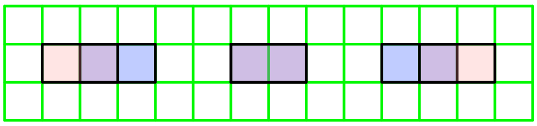

Abb. 5: *a* = 2, *b* = 1

Die Abbildung 6 zeigt den Fall $a = 3$ und $b = 2$.

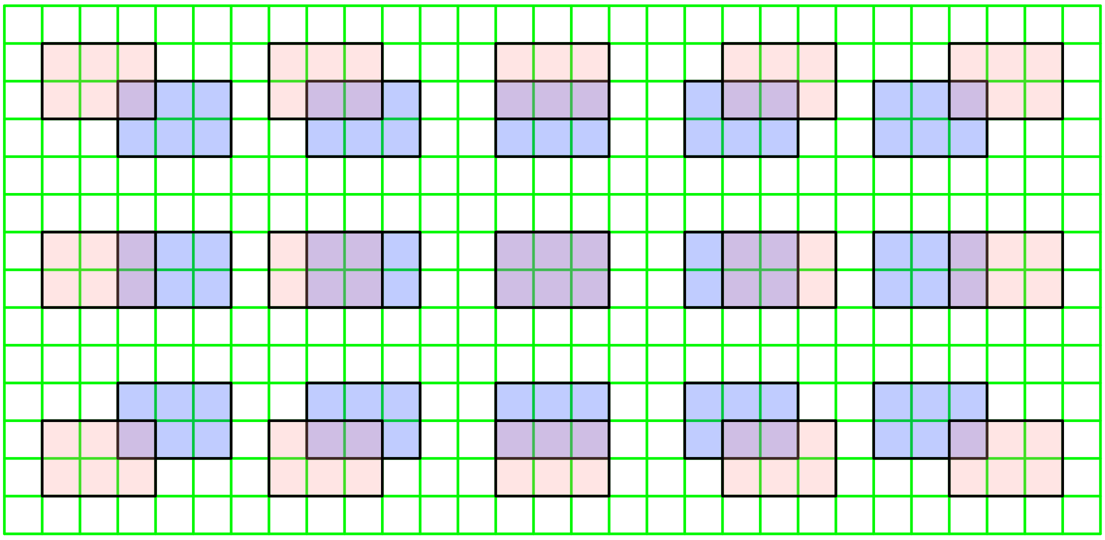

Abb. 6: *a* = 3, *b* = 2

Wir haben jeweils eine rechteckige Anordnung mit den Dimensionen $2a - 1$ und $2b - 1$, beides ungerade Zahlen. Das bleibt auch so, wenn wir a und b je um eine gerade Zahl erhöhen. Punktsymmetrisch liegende Beispiele sind gleich. Das mittlere Beispiel kommt nur einmal vor. Für die Gesamtzahl # erhalten wir daher:

$$\# = \tfrac{1}{2}(2a-1)(2b-1) + \tfrac{1}{2} \tag{4}$$

2.1.2.2 Querformat und Hochformat

Die Abbildung 7 zeigt eine Auslegeordnung für den Fall $a = 2$ und $b = 1$. Jedes Beispiel erscheint doppelt.

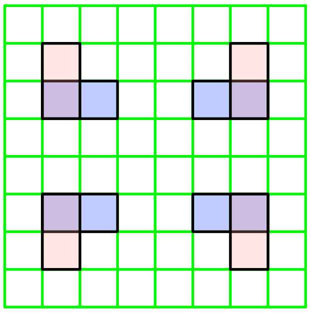

Abb. 7: *a* = 2, *b* = 1

Die Abbildung 8 zeigt eine Auslegeordnung für den Fall $a = 3$ und $b = 2$. Jedes Beispiel erscheint doppelt.

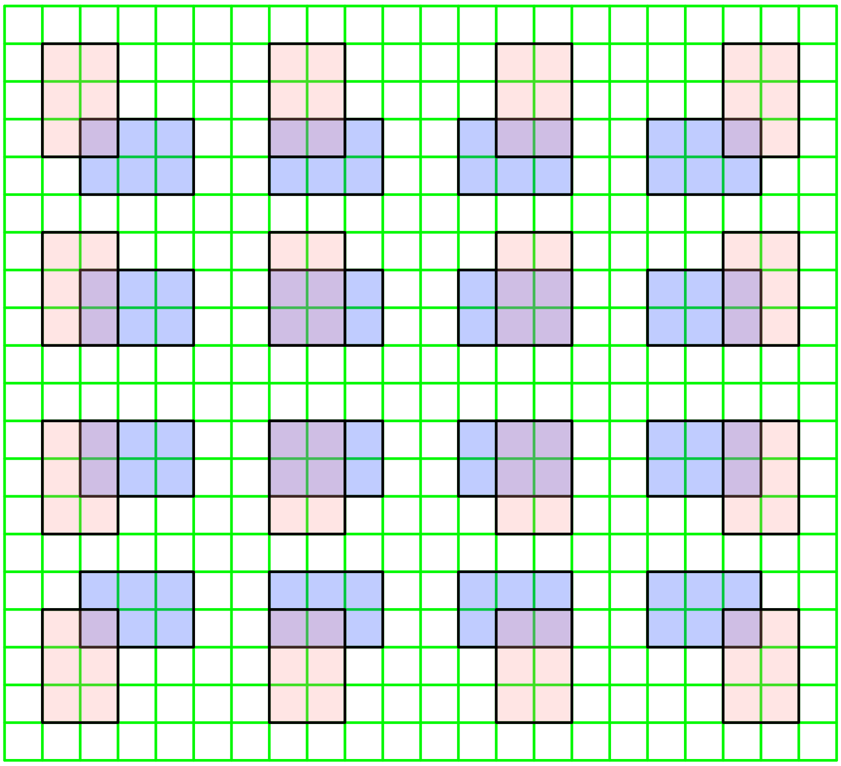

Abb. 8: *a* = 3, *b* = 2

Wir haben jeweils eine quadratische Anordnung der Seitenläng $a + b - 1$. Das ist nun eine gerade Zahl. Dies gilt auch, wenn wir a und b je um ein Vielfaches von 2 erhöhen.

Punktsymmetrisch liegende Beispiele sind gleich. Für die Gesamtzahl # erhalten wir daher:

$$\# = \tfrac{1}{2}\left(a+b-1\right)^2 \tag{5}$$

Bei ungleicher Parität von a und b erhalten also wir aus (4) und (5) insgesamt:

$$\# = \tfrac{1}{2}\left(2a-1\right)\left(2b-1\right)+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\left(a+b-1\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\left(a+b\right)^2+4\left(a-1\right)\left(b-1\right)-1\right) \tag{6}$$

2.2 Quadrate

Es ist $a = b$. Für $a = 1$ ergibt sich nur eine Lösung. Die Abbildung 9 zeigt die Situation für $a = 2$. Außer dem mittleren Beispiel erscheint jedes Beispiel viermal.

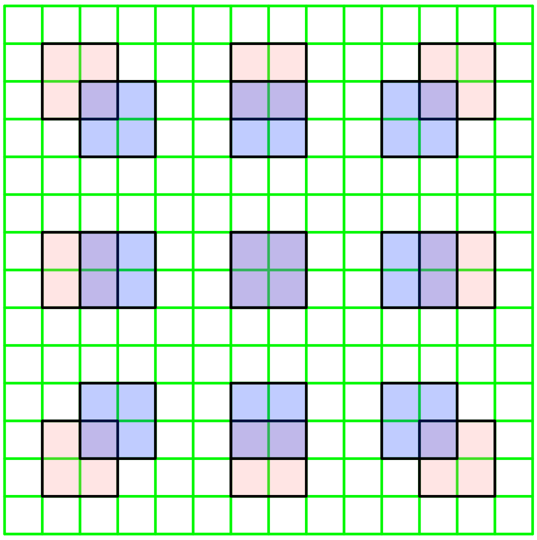

Abb. 9: $a = 2$

Die Abbildung 10 zeigt die Situation für $a = 3$.

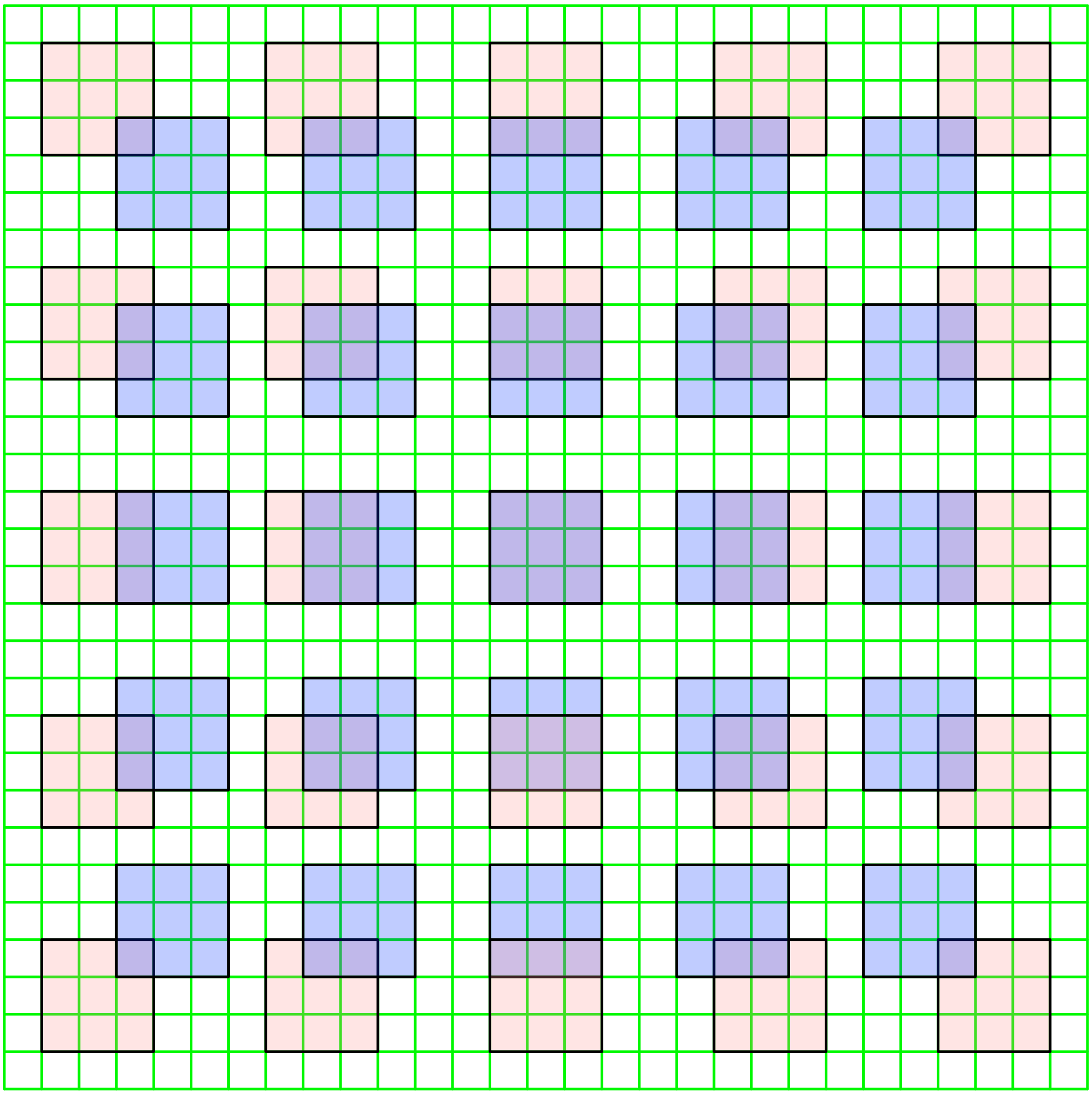

Abb.10: *a* = 3

Wir erhalten jeweils eine quadratische Anordnung der Seitenlänge $2a-1$. Dies ist eine ungerade Zahl. Außer dem mittleren Beispiel kommt jedes Beispiel viermal vor. Für die Gesamtzahl # ergibt sich daher:

$$\# = \tfrac{1}{4}\left(2a-1\right)^2 + \tfrac{3}{4} \tag{7}$$

3 Die Prozedur

Allgemein gilt folgende Prozedur (Abb. 11, Programmiersprache Maple):

```
Anzahl:=proc(a,b)
 local s:
  if a < b or a > b then
   if modp(a-b,2) = 0 then
     s:= 1/2*((a+b)^2+4*(a-1)*(b-1))
    else
     s:= 1/2*((a+b)^2+4*(a-1)*(b-1)-1)
    end:
   else s:=1/4*(2*a-1)^2+3/4 end:
  return s:
 end:
```

Abb.11: Prozedur

Die Tabelle 1 gibt die ersten Beispiele. Die Einschränkung $a > b$ wird fallengelassen. Die Tabelle ist symmetrisch.

a\b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	8	12	18	24	32	40	50	60
2	4	3	16	24	32	42	52	64	76	90
3	8	16	7	36	48	60	74	88	104	120
4	12	24	36	13	64	80	96	114	132	152
5	18	32	48	64	21	100	120	140	162	184
6	24	42	60	80	100	31	144	168	192	218
7	32	52	74	96	120	144	43	196	224	252
8	40	64	88	114	140	168	196	57	256	288
9	50	76	104	132	162	192	224	256	73	324
10	60	90	120	152	184	218	252	288	324	91

Tab. 1: Erste Beispiele

4 Zahlenspielereien

Wir diskutieren einige Eigenschaften der Tabelle 1 (ohne Beweise).

- In der Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten sind ausschließlich ungerade Zahlen. Diese bilden eine arithmetische Folge zweiten Grades.
- Alle übrigen Zahlen sind gerade.

- Die Zahlen in einer zur Hauptdiagonalen parallelen Nebendiagonale bilden eine arithmetische Folge zweiten Grades.
- In der ersten Nebendiagonale sind die Quadrate der geraden Zahlen, also 4, 16, 36, 64, ...
- Die Zahlen in der zweiten Nebendiagonale (also 8, 24, 48, 80, ...) sind jeweils das geometrische Mittel der benachbarten Quadratzahlen der ersten Nebendiagonale.
- Die Zahlen in der dritten Nebendiagonale (also 12, 32, 60, 96, ...) lassen sich so berechnen: das Produkt der beiden Nachbarzahlen in der zweiten Nebendiagonale wird dividiert durch die über Eck benachbarte Quadratzahl der ersten Nebendiagonale. Beispiel: 140 = 120*168/144.