Hans Walser, [20190210]

Rationaler Kosinus

1 Winkel und Vielfache

Wir arbeiten mit einem Winkel α_1 mit einem rationalen Kosinus-Wert:

$$\cos(\alpha_1) = \frac{p_1}{q_1}, \quad p_1 < q_1, \quad p_1, q_1 \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{ggT}(p_1, q_1) = 1 \tag{1}$$

Dann hat auch jedes ganzzahlige Vielfache dieses Winkels einen rationalen Kosinus-Wert:

$$\cos(n\alpha_1) = \frac{p_n}{q_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p_n, q_n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

2 Beweis

Für den Beweis benötigen wir die Formeln von de Moivre, die wir kurz herleiten. Aus der Formel von Euler

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n \\ \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi) &= \left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right)^n \end{aligned} \tag{3}$$

folgt durch Expandieren:

$$\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\varphi) \cdot \mathrm{i}^k \sin^k(\varphi) \tag{4}$$

Trennung in Real- und Imaginärteil liefert die Formeln von de Moivre:

$$\begin{aligned} \cos(n\varphi) &= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} \cos^{n-2j}(\varphi) \sin^{2j}(\varphi) \\ \sin(n\varphi) &= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \cos^{n-(2j+1)}(\varphi) \sin^{2j+1}(\varphi) \end{aligned} \tag{5}$$

Weiter ist

$$\sin^2(\alpha_1) = 1 - \frac{p_1^2}{q_1^2} \tag{6}$$

rational. Die Sinuswerte selber sind in der Regel nicht rational (ausgenommen im Kontext mit pythagoreischen Dreiecken).

In der Formel (5) für $\cos(n\varphi)$ kommen die Sinuswerte nur mit geraden Exponenten vor. Daher ist $\cos(n\alpha_1)$ rational.

Wir haben jetzt allerdings nur bewiesen, dass $\cos(n\alpha_1)$ rational ist (Existenzbeweis), können diese rationale Zahl aber nicht mit Zähler und Nenner darstellen. Dazu dienen die weiteren Überlegungen.

3 Bezeichnungen

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= n\alpha_1 \\ \cos(\alpha_n) &= \frac{p_n}{q_n} \end{aligned} \tag{7}$$

4 Beispiel

Es sei $p_1 = 8$ und $q_1 = 9$ (Abb. 1).

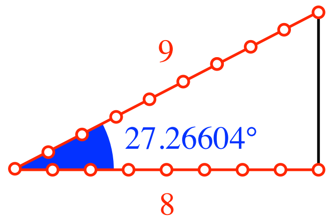

Abb. 1: Beispiel

Damit ist:

$$\alpha_1 = \arccos\left(\tfrac{8}{9}\right) \approx 0.47588 \approx 27.26604° \tag{8}$$

In der Tabelle 1 ist in der letzten Spalte der Kosinus der Vielfachen des Winkels α_1 angegeben. In der zweiten und dritten Spalte sind ganze Zahlen angegeben, deren Quotient (vierte Spalte) mit dem Kosinuswert des Vielfachen des Winkels α_1 (numerisch) übereinstimmt. Abweichungen ergeben sich erst in den hinteren Dezimalstellen und dürften rundungsbedingt sein.

n	p_n	q_n	$\frac{p_n}{q_n}$	$\cos(n\alpha_1)$
1	8	9	0.8888888889	0.8888888889
2	47	81	0.5802469136	0.5802469137
3	104	729	0.1426611797	0.1426611797
4	–2143	6561	–0.3266270386	–0.3266270380
5	–42712	59049	–0.7233314705	–0.7233314703
6	–509809	531441	–0.9592955756	–0.9592955756
7	–4697272	4782969	–0.9820828862	–0.9820828863
8	–33861823	43046721	–0.7866295554	–0.7866295555
9	–161310136	387420489	–0.4163696567	–0.4163696575
10	161845487	3486784401	0.0464168324	0.0464168318
11	15655648808	31381059609	0.4988884698	0.4988884695
12	237380896481	282429536481	0.8404960028	0.8404960023

Tab. 1: Beispiel

In der dritten Spalte ist offensichtlich:

$$q_n = q_1^n \tag{9}$$

Die Zahlen in der zweiten Spalte genügen der Rekursion:

$$p_n = 16p_{n-1} - 81p_{n-2} \tag{10}$$

Dies ist nicht offensichtlich und muss begründet werden.

5 Konstruktiver Beweis

Wir gehen aus von der Situation und den Bezeichnungen der Formel (1) (Abb. 2). Gegeben sind also p_1 und q_1.

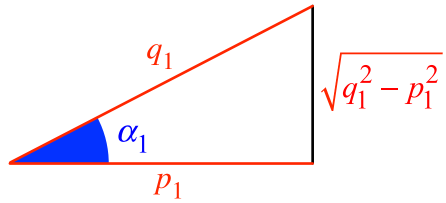

Abb. 2: Allgemeine Startsituation

Es ist:

$$\cos(\alpha_1) = \frac{p_1}{q_1} \quad , \quad \sin(\alpha_1) = \frac{\sqrt{q_1^2 - p_1^2}}{q_1} \tag{11}$$

Weiter sei:

$$q_n = q_1^n \tag{12}$$

Die Werte p_n seien definiert durch die Startwerte $p_0 = 1$ und das gegebene p_1 sowie durch die Rekursion:

$$p_n = 2p_1 p_{n-1} - q_1^2 p_{n-2} \tag{13}$$

Wir wollen zeigen:

$$\cos(n\alpha_1) = \frac{p_n}{q_n} \tag{14}$$

Dazu erarbeiten wir die verallgemeinerte Formel von Binet für die durch (13) mit den zugehörigen Startwerten gegebene Folge.
Diese Formel von Binet hat die allgemeine Form:

$$p_n = r\gamma_1^n + s\gamma_2^n \tag{15}$$

Dabei sind γ_1 und γ_2 die Lösungen der sich aus (13) ergebenden quadratischen Gleichung

$$\gamma^2 - 2p_1\gamma + q_1^2 = 0 \tag{16}$$

während sich die Koeffizienten r und s aus den Startwerten ergeben. Die Gleichung (16) hat die beiden Lösungen:

$$\gamma_{1,2} = \frac{2p_1 \pm \sqrt{4p_1^2 - 4q_1^2}}{2} = p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - q_1^2} \qquad (17)$$

Wegen $p_1 < q_1$ ist der Radikand in (17) negativ und wir haben die beiden konjugiert komplexen Lösungen:

$$\gamma_{1,2} = p_1 \pm \mathrm{i}\sqrt{q_1^2 - p_1^2} \qquad (18)$$

Wenn wir in (15) $r = s = \frac{1}{2}$ setzen, können wir mit (18) verifizieren, dass die Startwerte der Folge erfüllt sind.
Wegen (11) können wir die Lösungen (18) der quadratischen Gleichung (16) schreiben in der Form:

$$\gamma_{1,2} = q_1\left(\cos\left(\alpha_1\right) \pm \mathrm{i}\sin\left(\alpha_1\right)\right) = q_1 \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\alpha_1} \qquad (19)$$

Somit erhalten wir aus (12), (15) und (19) für die Formel von Binet:

$$p_n = \tfrac{1}{2}\left(q_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1}\right)^n + \tfrac{1}{2}\left(q_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right)^n = \tfrac{1}{2} q_n \underbrace{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\alpha_1}\right)}_{=2\cos\left(n\alpha_1\right)} = q_n \cos\left(n\alpha_1\right) \qquad (20)$$

Daraus ergibt sich (14). Dies war zu zeigen.

6 Gleichschenklige Dreiecke

Wir können das Dreieck der Abbildung 1 zu einem gleichschenkligen Dreieck mit dem rationalen Seitenverhältnis 9:9:16 ergänzen (Abb. 3).

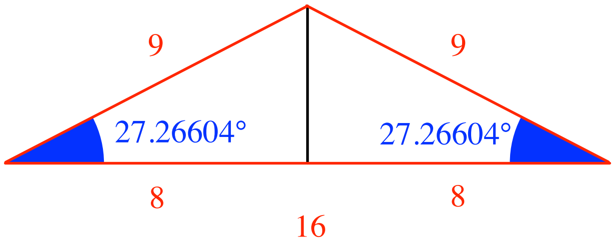

Abb. 3: Gleichschenkliges Dreieck mit rationalem Seitenverhältnis

Wenn wir nun die Basiswinkel verdoppeln, erhalten wir ein gleichschenkliges Dreieck mit dem ebenfalls rationalen Seitenverhältnis 81:81:94 (Tab. 1, Abb. 4).

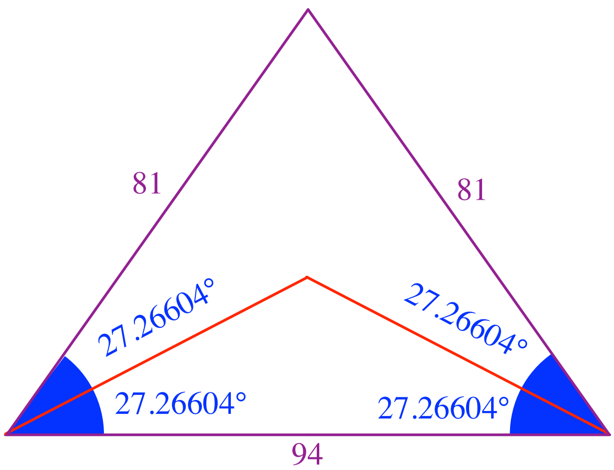

Abb. 4: Doppelte Basiswinkel

Wie sieht die Situation bei einer Verdreifachung, Vervierfachung, ... der Basiswinkel aus?

Weblinks

Hans Walser: Rationale Seitenverhältnisse

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/R/Rationale_Seitenverhaeltnisse/Rationale_Seitenverhaeltnisse.htm