Hans Walser, [20201215]

Rechtecke im Dodekaeder

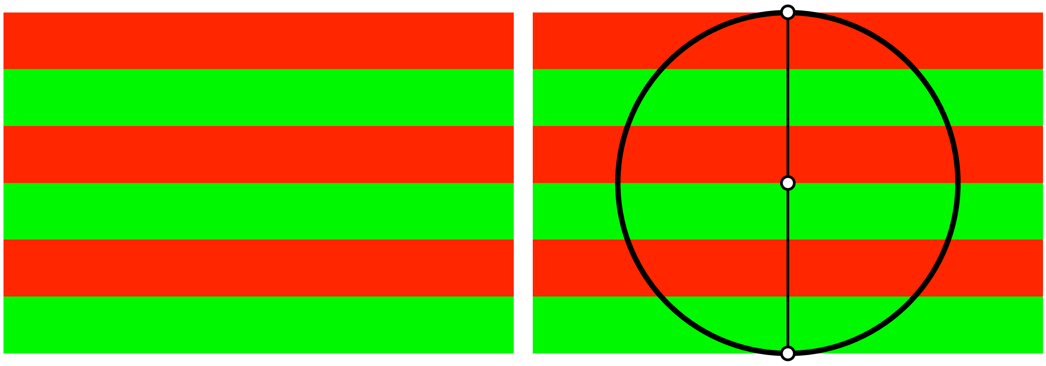
1 Worum geht es?

Ins reguläre Dodekaeder lassen sich zwei verschiedene Rechtecke einpassen welche beide den Dodekaeder-Mittelpunkt als Mittelpunkt haben.

Bildergalerie.

2 Die beiden Rechtecke in der Ebene

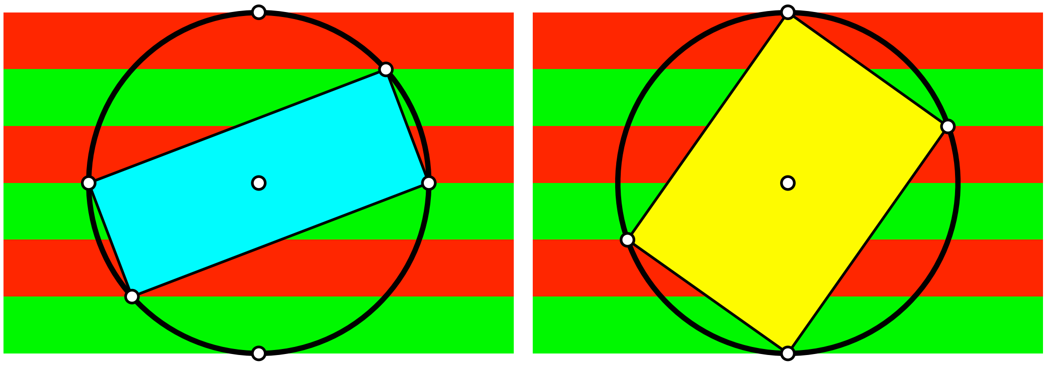
Wir beginnen mit sechs gleich breiten Streifen und einem eingepassten Kreis (Abb. 1). Sein Radius ist das Dreifache der Streifenbreite.



a) b)

Abb. 1: Streifen und Kreis

Nun passen wir zwei Rechtecke ein (Abb. 2).



a) b)

Abb. 2: Die beiden Rechtecke

Das schmale hellblaue Rechteck (Abb. 2a) hat das Seitenverhältnis $\Phi : \frac{1}{\Phi}$. Dabei ist $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ der sogenannte Goldene Schnitt (Walser 2013a).

Das gelbe Rechteck (Abb. 2b) hat das Seitenverhältnis $\sqrt{2} : 1$. Es ist ein sogenanntes DIN-Rechteck (Walser 2013b).

3 Im Dodekaeder

Diese beiden Rechtecke lassen sich ins reguläre Dodekaeder einpassen.

3.1 Das schmale Rechteck

Die Abbildung 3 zeigt drei paarweise orthogonale schmale Rechtecke im Dodekaeder.

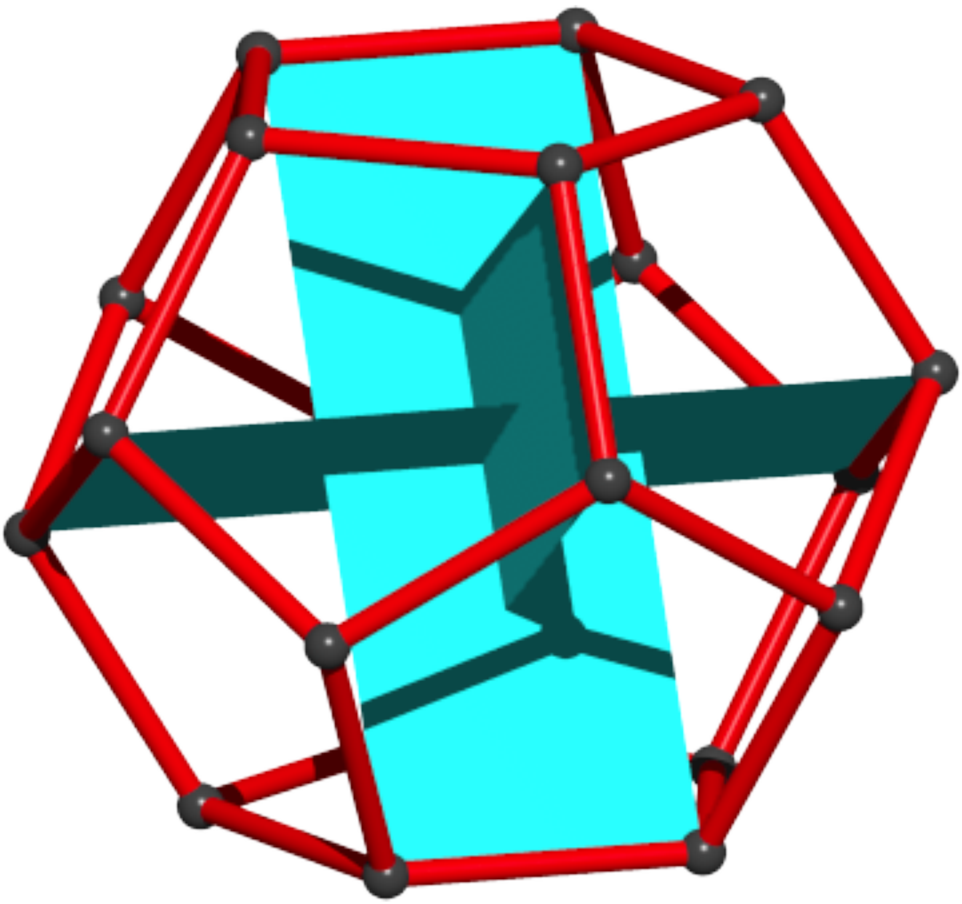


Abb. 3: Schmale Rechtecke

Es gibt insgesamt 15 Möglichkeiten, ein schmales Rechteck ins reguläre Dodekaeder einzupassen (Abb. 4). Die Ebenen dieser Rechtecke sind *Symmetrieebenen* des Dodekaeders.

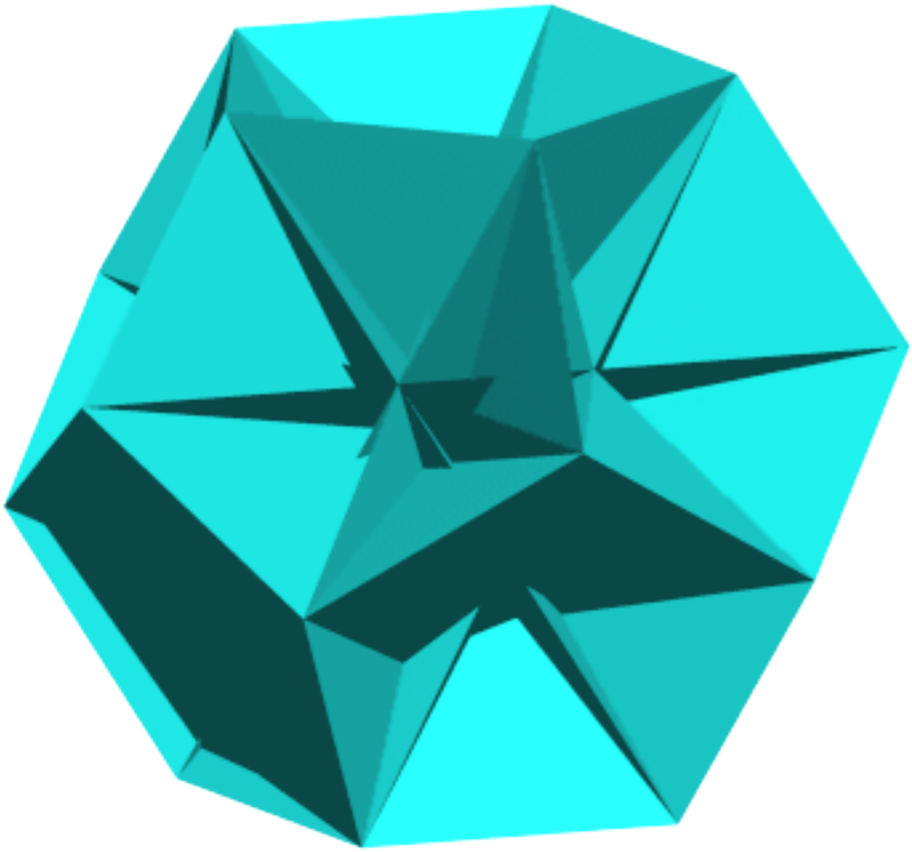


Abb. 4: Die 15 schmalen Rechtecke

Die Abbildung 5 zeigt die Figur in 5 verschiedenen Farben. Die jeweils drei paarweise orthogonalen Rechtecke haben dieselbe Farbe.

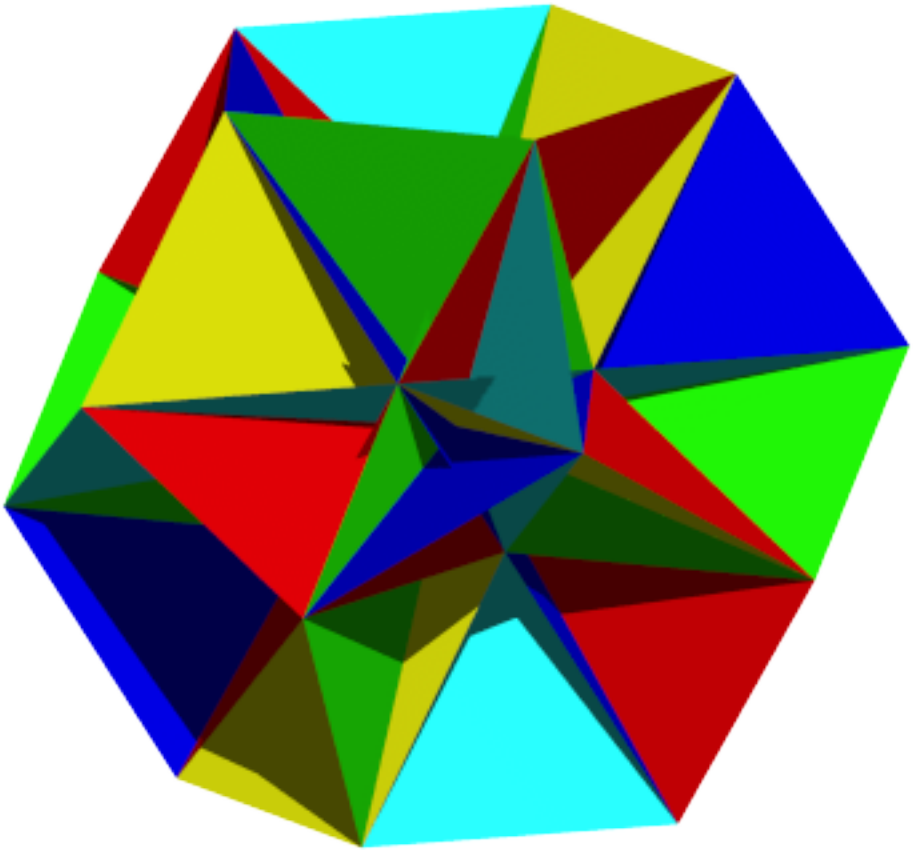


Abb. 5: Fünf Farben

In der Abbildung 6 ist das schmale Rechteck reduziert auf die Dreiecke in den spitzen Winkelfeldern der Diagonalen.

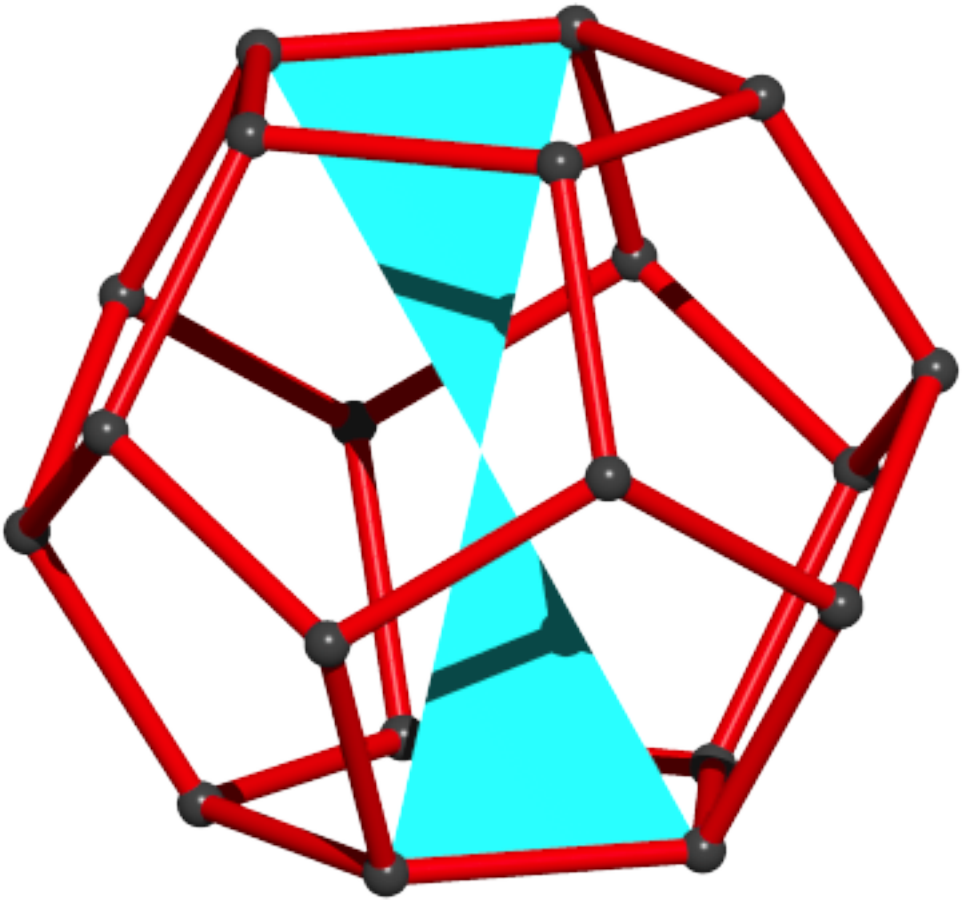


Abb. 6: X

Die Abbildungen 7 und 8 zeigen alle 15 Rechtecke in dieser modifizierten Form. Die Figur ist aus zwölf Pyramiden zusammengesetzt.

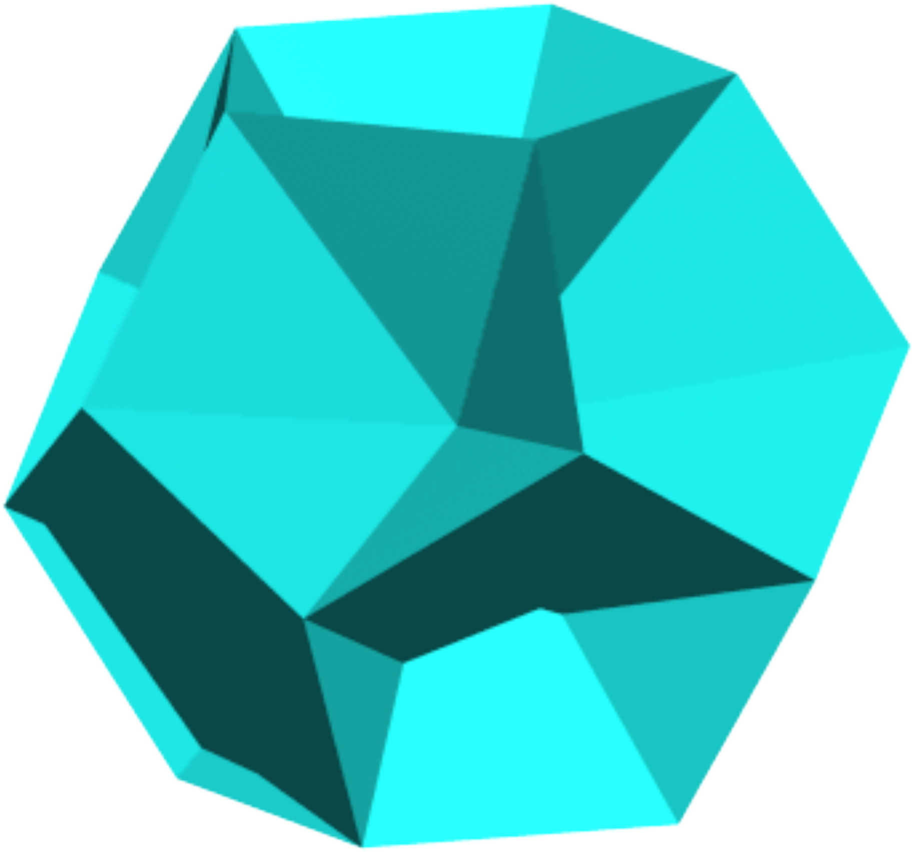


Abb. 7: Zwölf Pyramiden

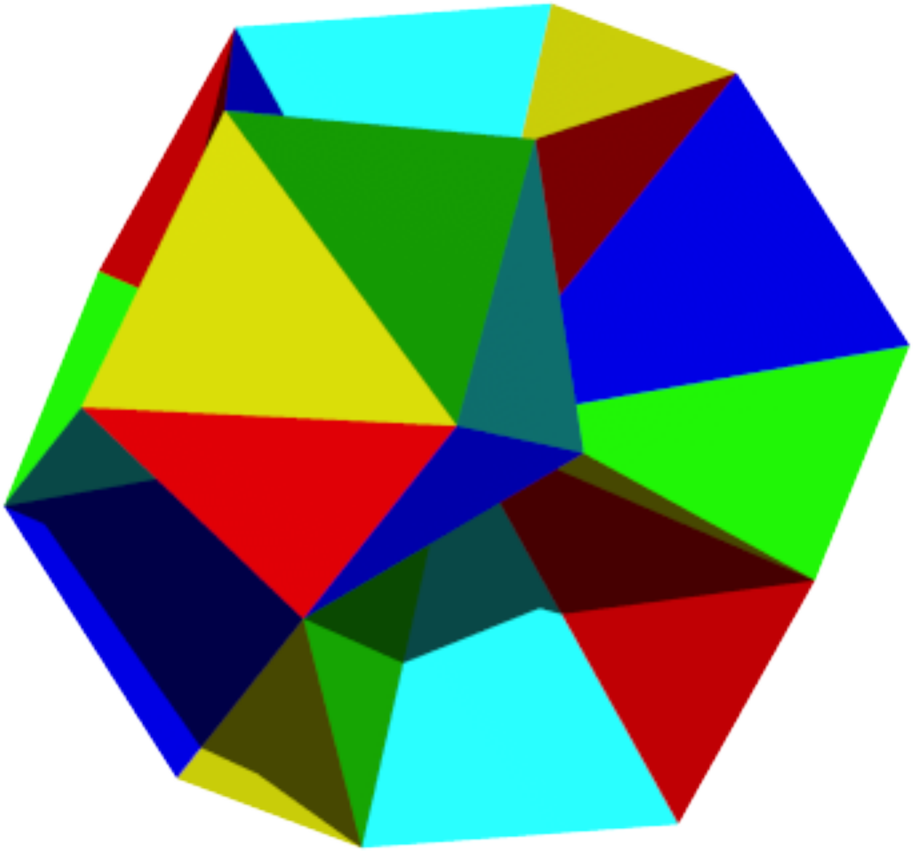


Abb. 8: Zwölf bunte Pyramiden

Eine Bemerkung zur Kombinatorik: Wir haben bei jeder Pyramide eine andere zyklische Anordnung der fünf Farben, also insgesamt zwölf. Für fünf Farben gibt es an sich $(5-1)! = 4! = 24$ zyklische Anordnungen. In unserem Modell sind ausgehend von einer Basis-Anordnung, genau die zwölf geraden Permutationen realisiert.

Zu jeder Dodekaederkante gibt es ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze im Dodekaeder-Mittelpunkt. Die Figur der Abbildung 8 kann daher auch als Kantenmodell des Dodekaeders gesehen werden.

3.2 Das DIN-Rechteck

Die Abbildung 9 zeigt zwei orthogonale DIN-Rechtecke im Dodekaeder. Die Ebene eines solchen DIN-Rechteckes ist *keine* Symmetrieebene des Dodekaeders.

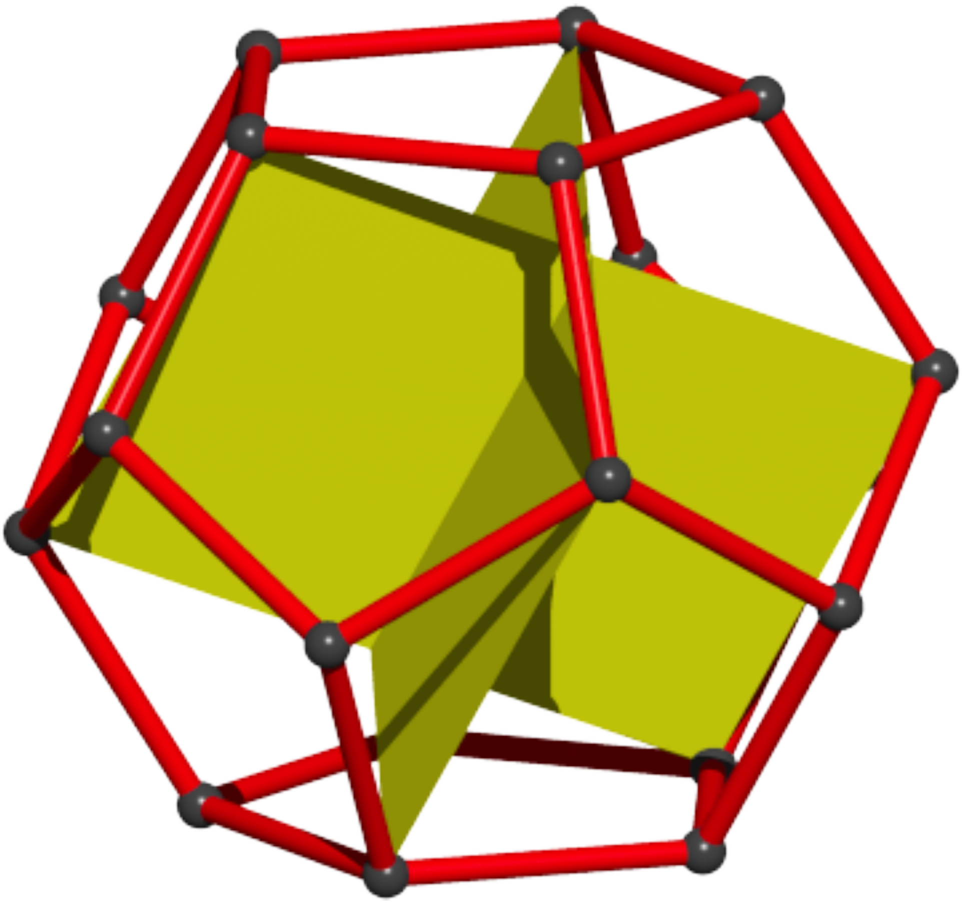


Abb. 9: Zwei DIN-Rechtecke

In der Abbildung 10 sind es sechs DIN-Rechtecke. Es sind die Diagonalebenen eines Würfels.

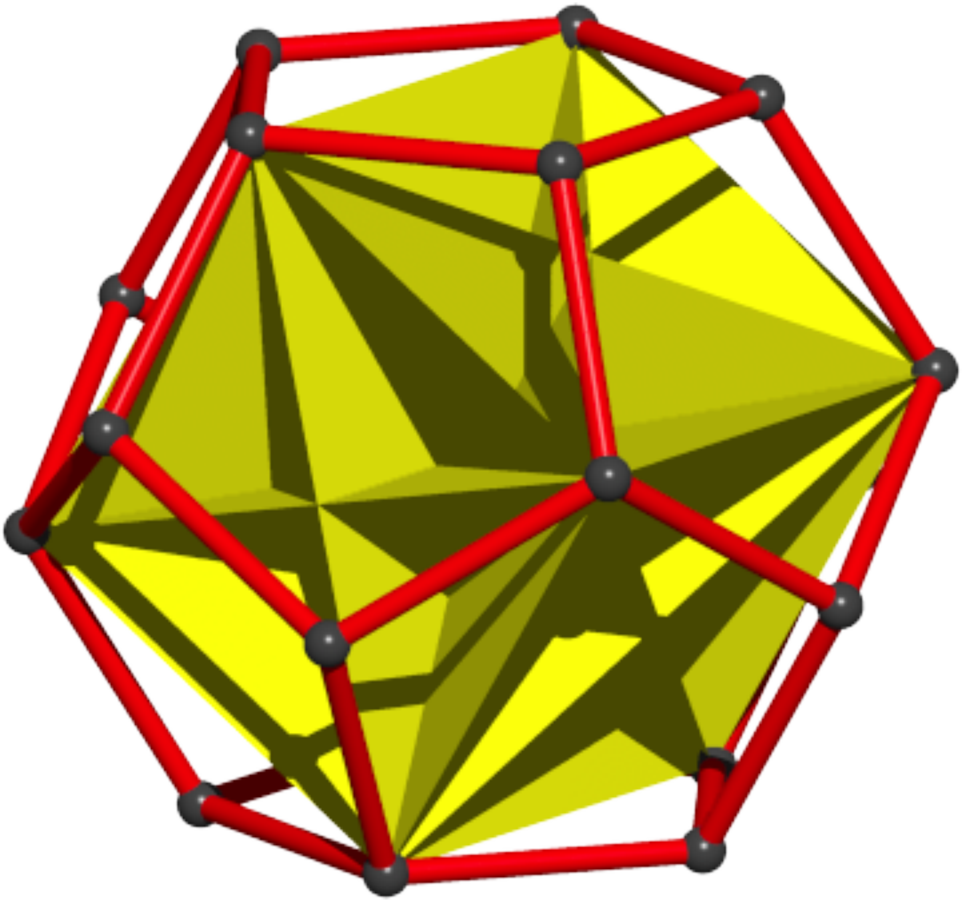


Abb. 10: Diagonalebenen eines Würfels

Insgesamt gibt es 30 DIN-Rechtecke im Dodekaeder (Abb. 11).

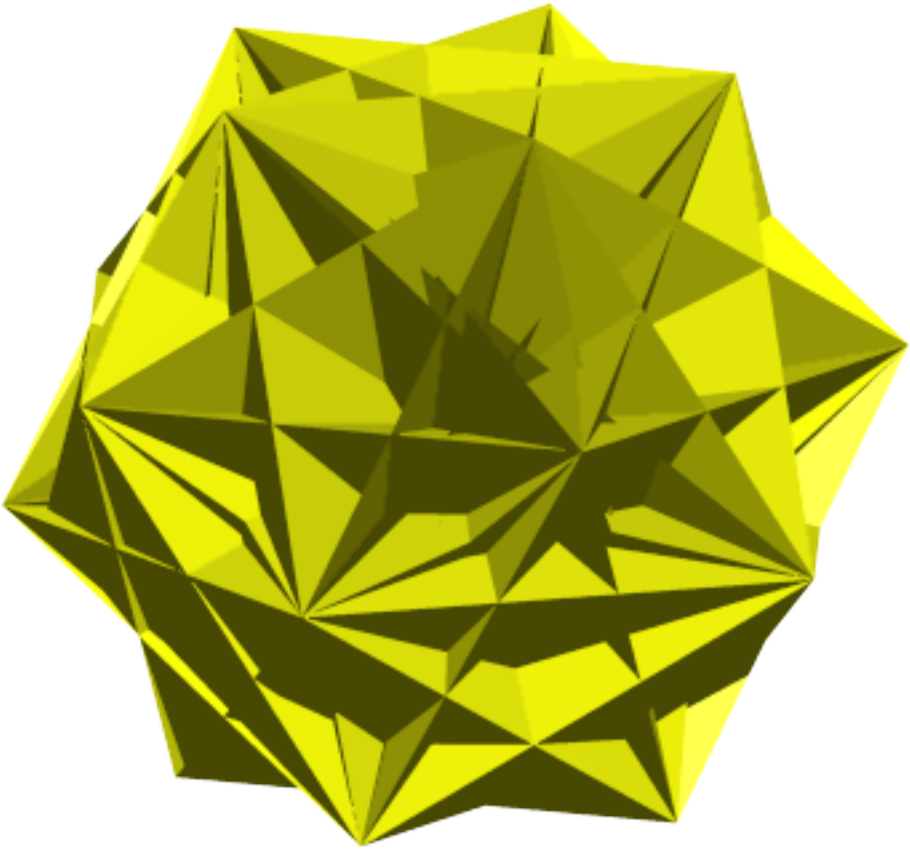


Abb. 11: 30 DIN-Rechtecke

In der Abbildung 12 ist für jeden der fünf möglichen Würfel eine andere Farbe gewählt.

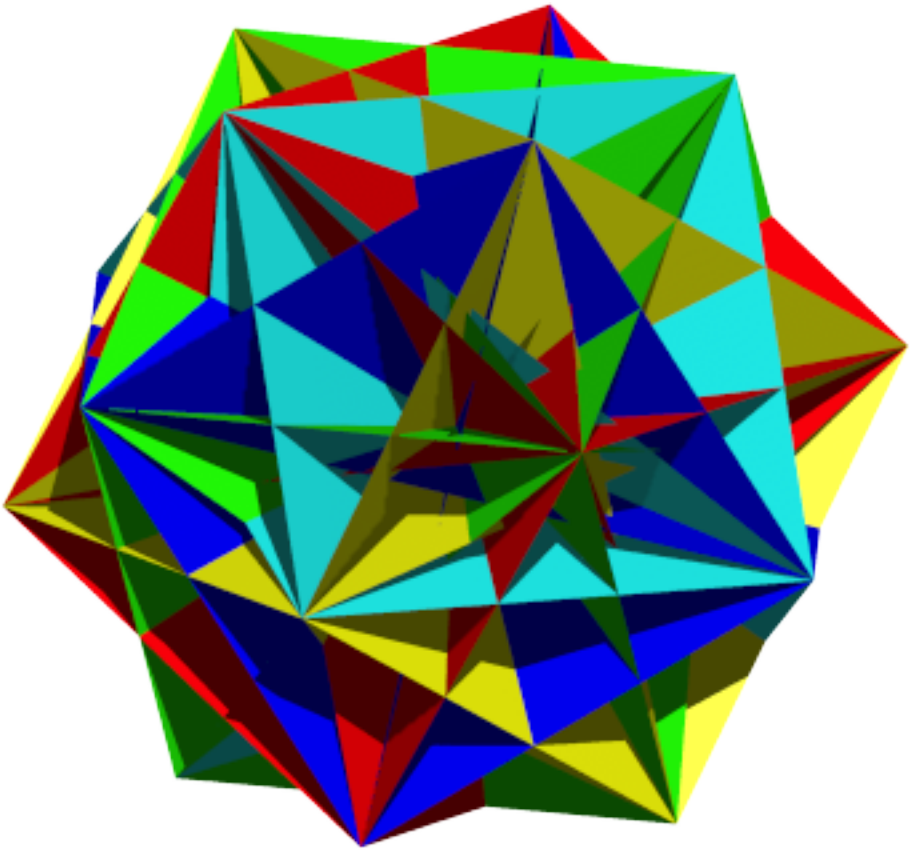


Abb. 12: Fünf Farben

Wir können die DIN-Rechtecke mit den Diagonalen zuschneiden (Abb. 13).

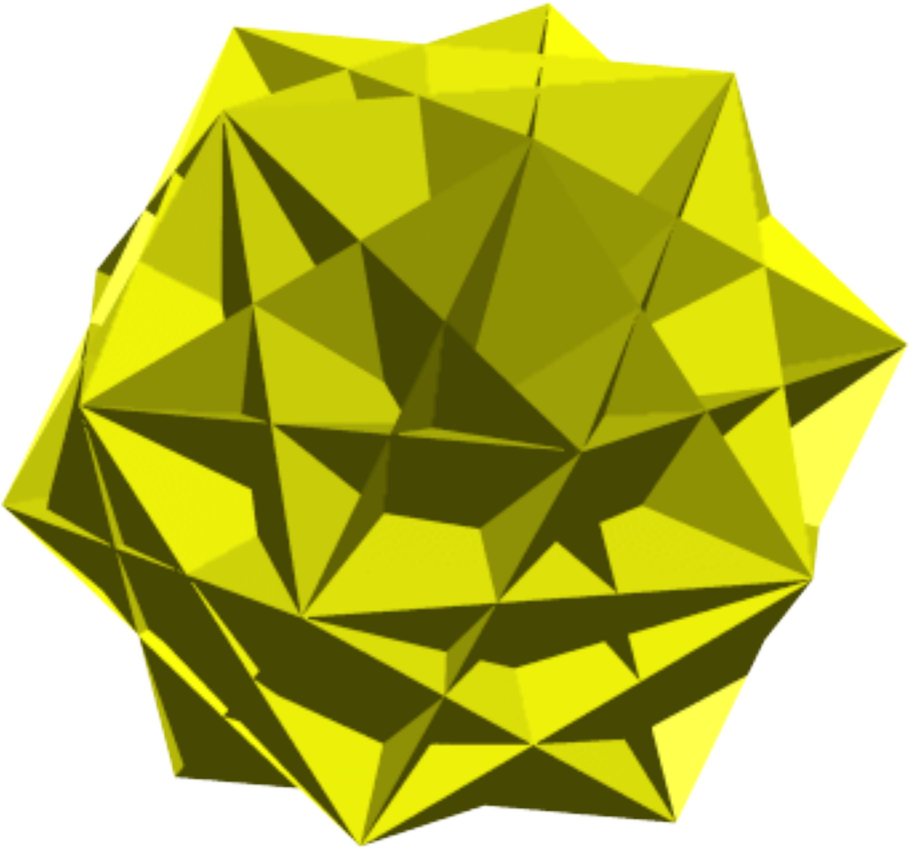


Abb. 13: X

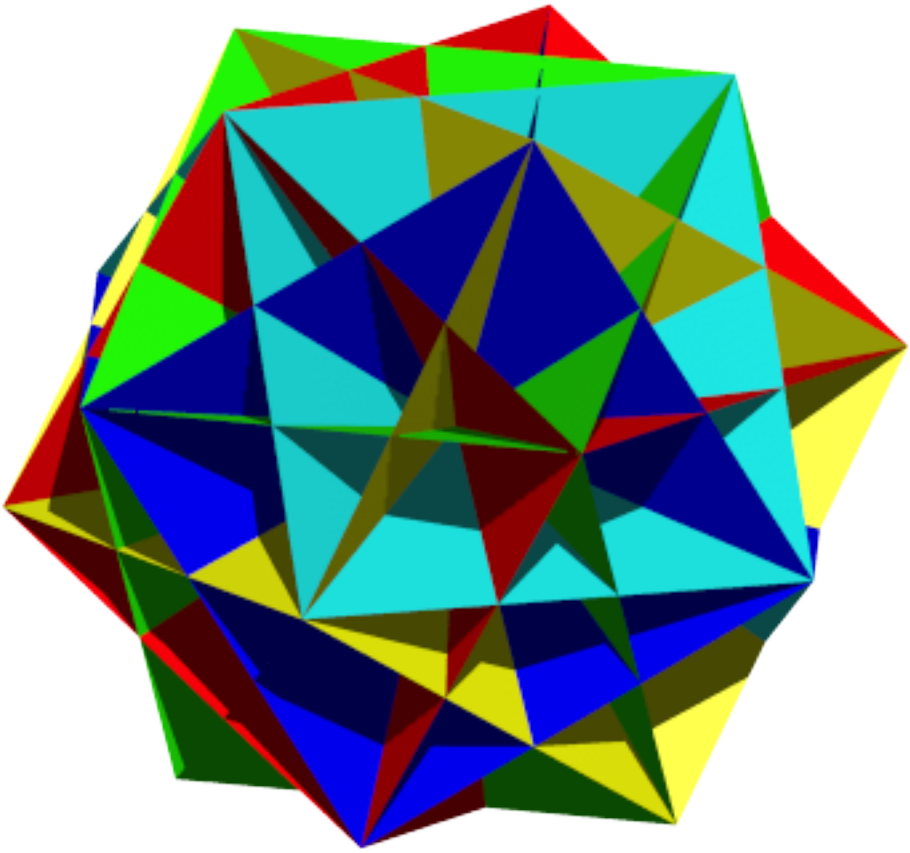


Abb. 14: X. Fünf Farben

3.3 Überlagerungen

Die Abbildung 15 zeigt die Überlagerung der Abbildungen 7 und 13.

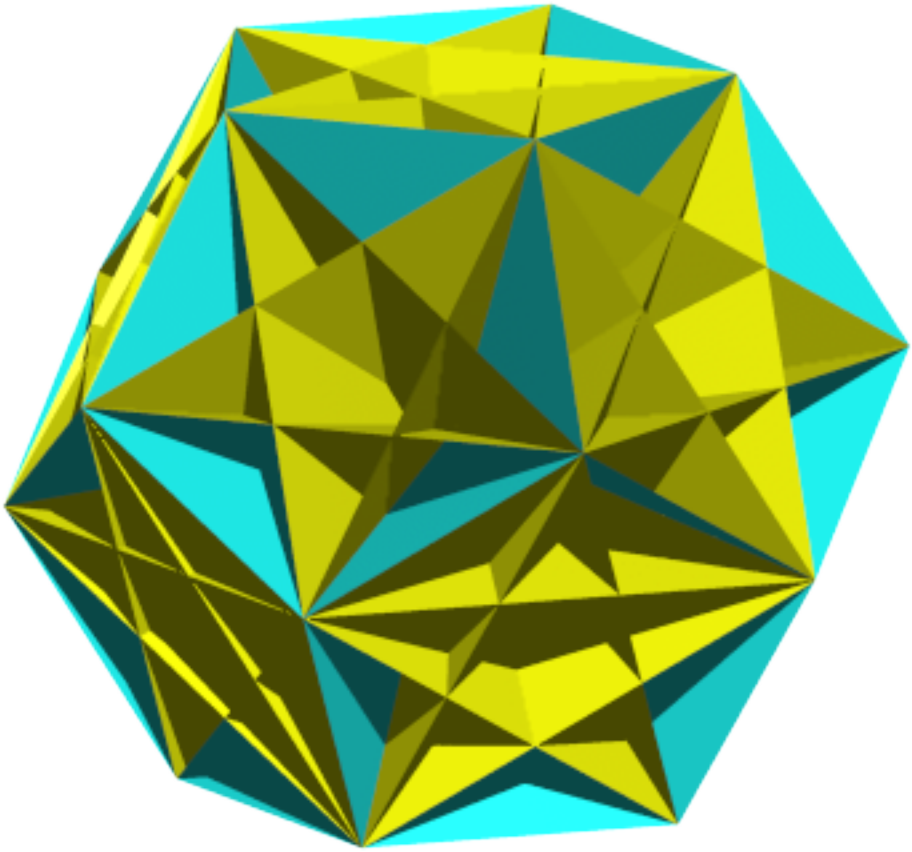


Abb. 15: Monochrome Überlagerung

Die Abbildung 16 zeigt die Überlagerung der Abbildungen 8 und 14.

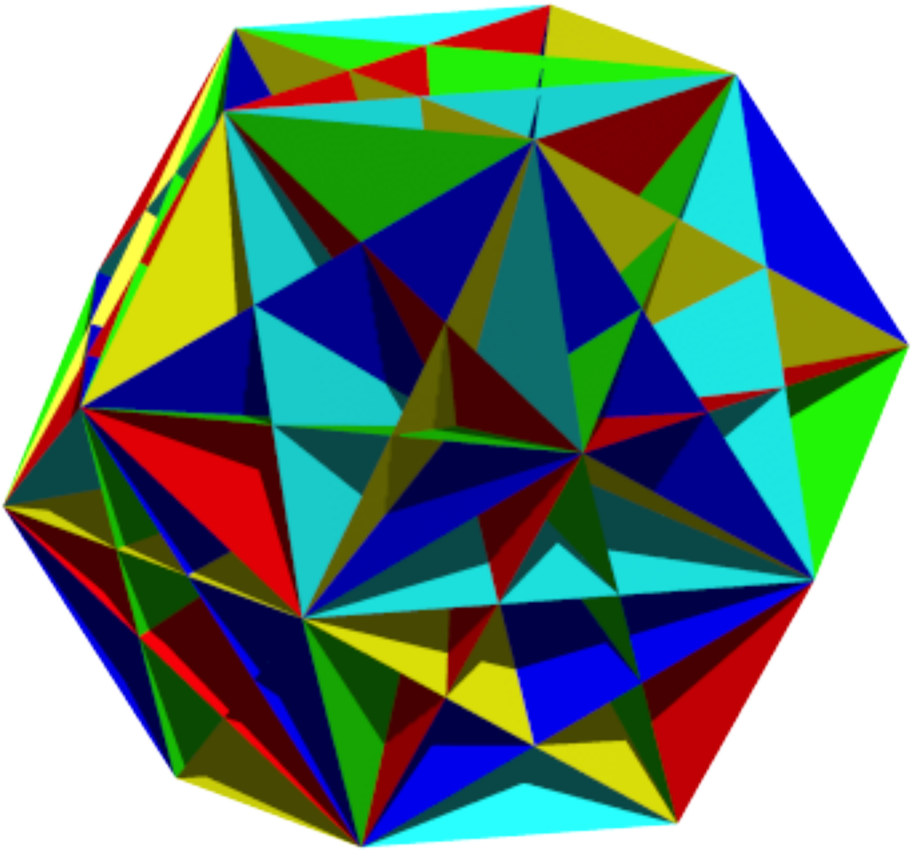


Abb. 16: Fünf Farben

Website

Hans Walser: Streifen, DIN-Rechteck und Goldenes Rechteck
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Streifen/Streifen.htm

Literatur

Walser, Hans (2013a): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, Hans (2013b): *DIN A4 in Raum und Zeit*. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-69-1.