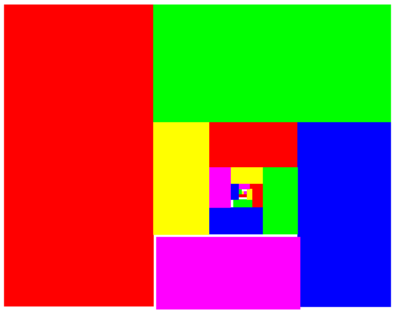
Hans Walser, [20060415a]

Rechteckszerlegung

1 Zerlegung in Rechtecke

Die Idee ist, ein Rechteck in eine spiralförmige Folge von zueinander ähnlichen Rechtecken zu zerlegen, wobei die Rechtecke dieser Folge jeweils durch eine Drehstreckung auseinander hervorgehen.

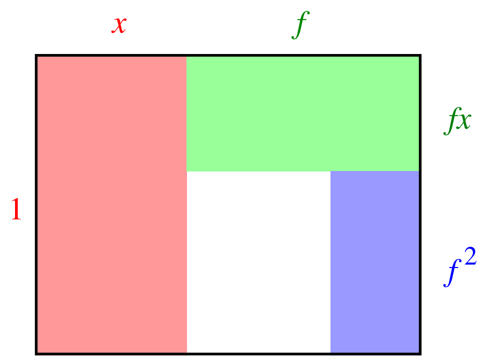


Beispiel

1.1 Berechungen

1.1.1 Teilrechteck gegeben

Wir gehen zunächst davon aus, dass das Format $1 \times x$ der Teilrechtecke gegeben ist; ferner sei *f* der Faktor der Drehstreckung. Es ist $0 < f < 1$.



Maße

Aus der Figur lesen wir die Beziehung ab:

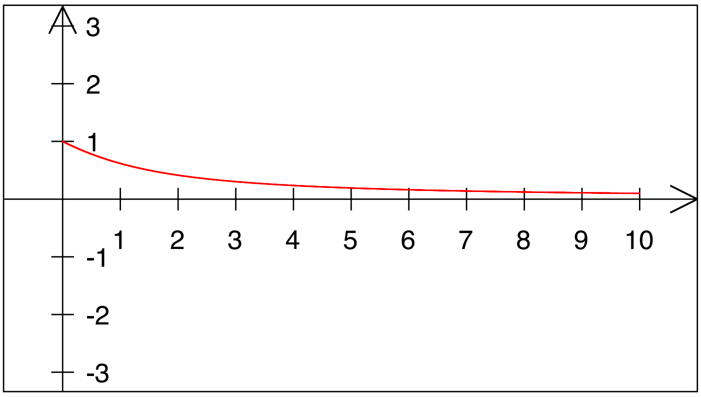
$$fx + f^2 = 1$$

$$f^2 + fx - 1 = 0$$

Bei gegebenem x ist das eine quadratische Gleichung für *f*; es interessiert nur die positive Lösung:

$$f(x) = \frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

Diese Funktion hat folgenden Graphen:

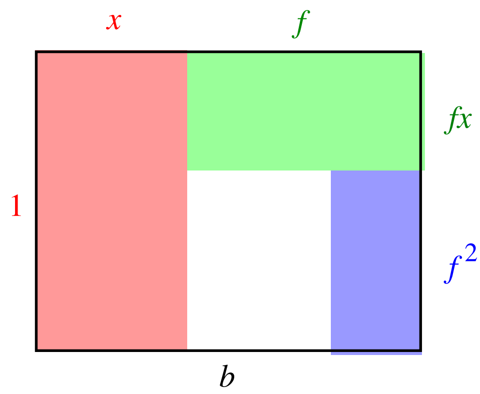


$$f(x)=\frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

Es ist $f(1)=\rho$ (Goldener Schnitt) und $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)=0$.

1.1.2 Gesamtrechteck gegeben

Nun sei das zu zerlegende Recheck geben mit den Maßen $1\times b$, $b>1$.



Großes Rechteck gegeben

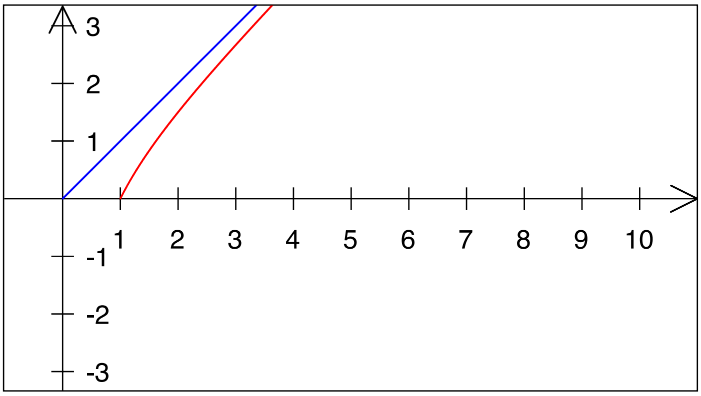
Dann ist zunächst:

$$b=x+f=x+\frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2}=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

Auflösen nach x liefert:

$$\begin{aligned} b&=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\\ 2b-x&=\sqrt{x^2+4}\\ 4b^2-4bx+x^2&=x^2+4\\ b^2-1&=bx\\ x&=b-\tfrac{1}{b} \end{aligned}$$

Die Funktion $x(b) = b - \frac{1}{b}$ hat den Graphen:



$x(b) = b - \frac{1}{b}$

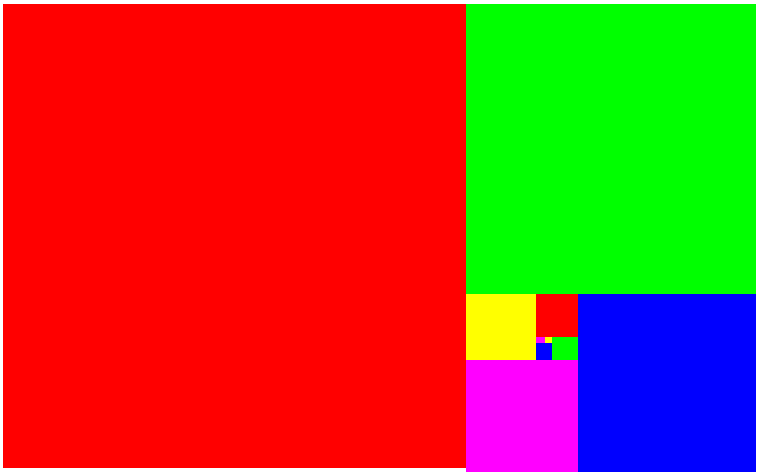
Es ist: $\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{x(b)}{b}\right) = 1$. Ferner ist:

$$bf = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\,\frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - x^2}{4} = 1$$

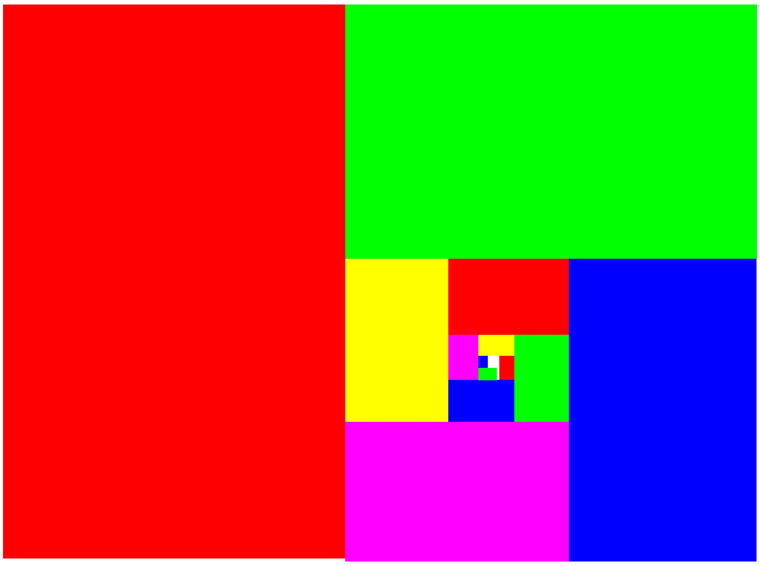
1.2 Sonderfälle

1.2.1 Das Goldene Rechteck

Falls das zu zerlegende Rechteck ein Goldenes Rechteck ist, erfolgt die übliche Zerlegung in Quadrate.



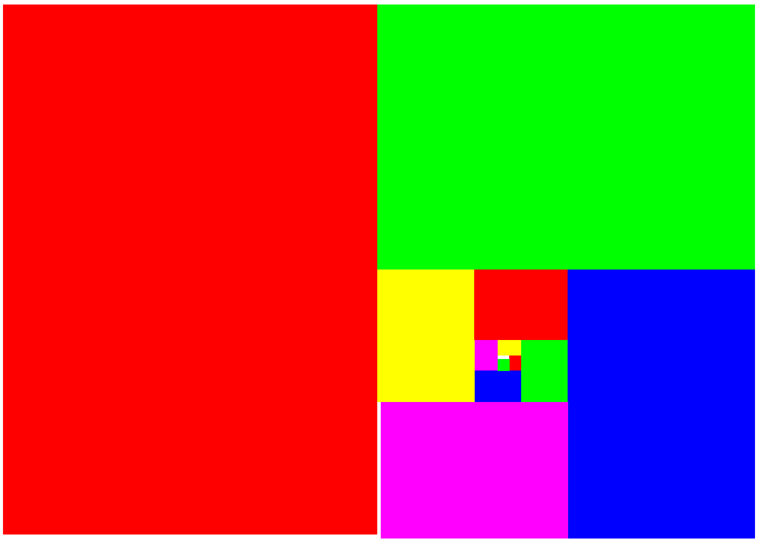
Abschneiden von Quadraten im Goldenen Rechteck



Abschneiden von Goldenen Rechtecken

1.2.2 Das DIN Rechteck

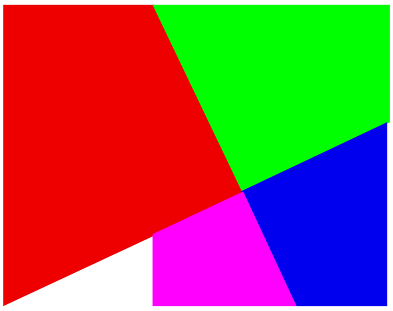
Im DIN Recheck ist zunächst $b = \sqrt{2}$. Dann ist $f = \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und wegen $b = x + f$ ist auch $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Es sind also simultan das große zu zerlegende Rechteck wie die abzuschneidenden Rechtecke solche mit dem DIN Verhältnis. Daher gibt es im Unterschied zum Goldenen Rechteck (und auch allen übrigen Rechtecken) nur eine Figur.



DIN Rechteck

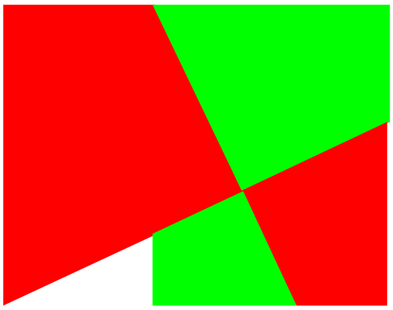
2 Zerlegung in Sehnenvierecke

Das folgende Bild zeigt eine Zerlegung in vier Vierecke, welche je durch eine Drehstreckung auseinander hervorgehen. Die Zerlegung geht allerdings nicht auf. Die vier Vierecke sind Sehnenvierecke.



Zerlegung (mit Rest) in Sehnenvierecke

Die Figur kann auch mit nur zwei Farben gezeichnet werden.

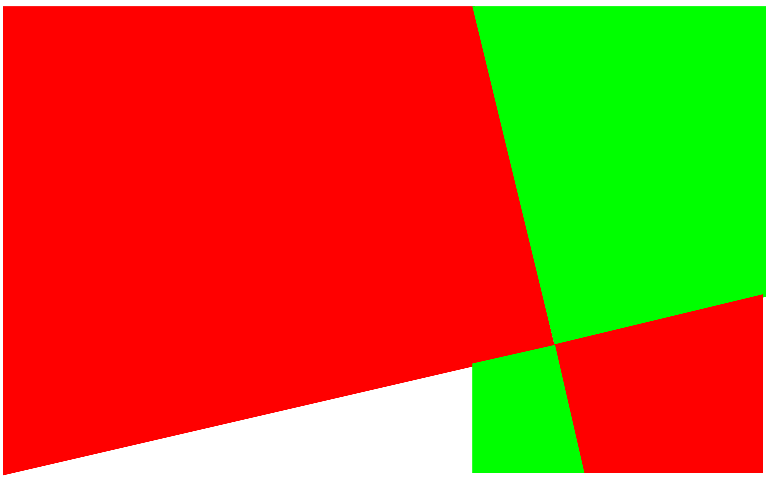


Zerlegung in zwei Farben

2.1 Sonderfälle

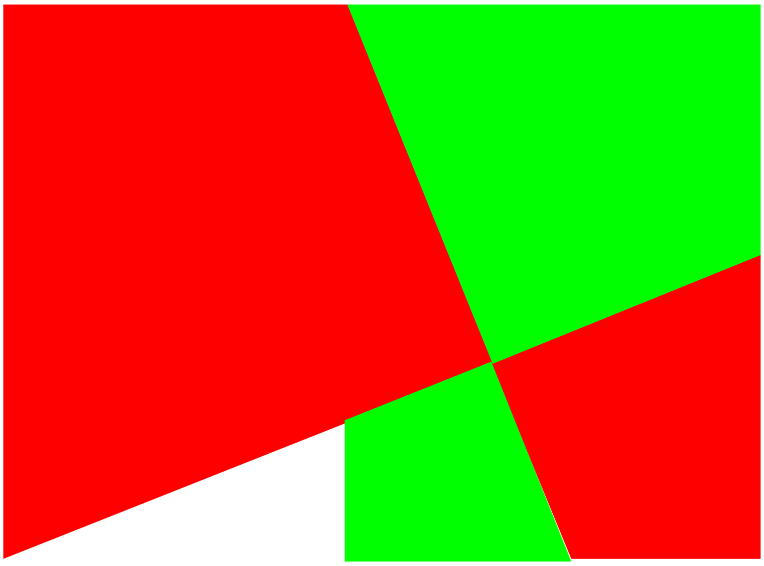
2.1.1 Goldenes Rechteck

In der folgenden Figur ist das Umrissrechteck eine Goldenes Rechteck. Ebenso ist das grüne Rechteck ein Goldenes Rechteck. Links neben dem grünen Rechteck steht ein nicht sichtbares Quadrat.



Wo ist das Goldene Rechteck?

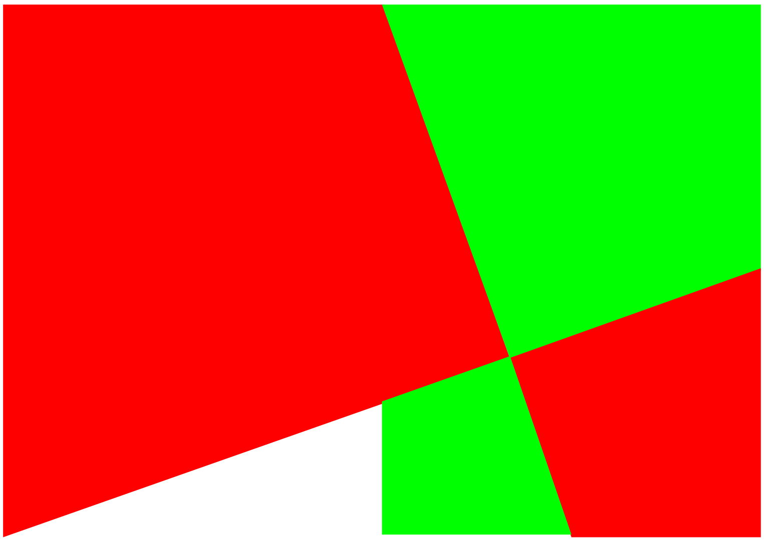
In der folgenden Figur ist das links neben dem grünen Rechteck stehende nicht eigentlich sichtbare Rechteck ein Goldenes Rechteck.



Wo ist das Goldene Rechteck?

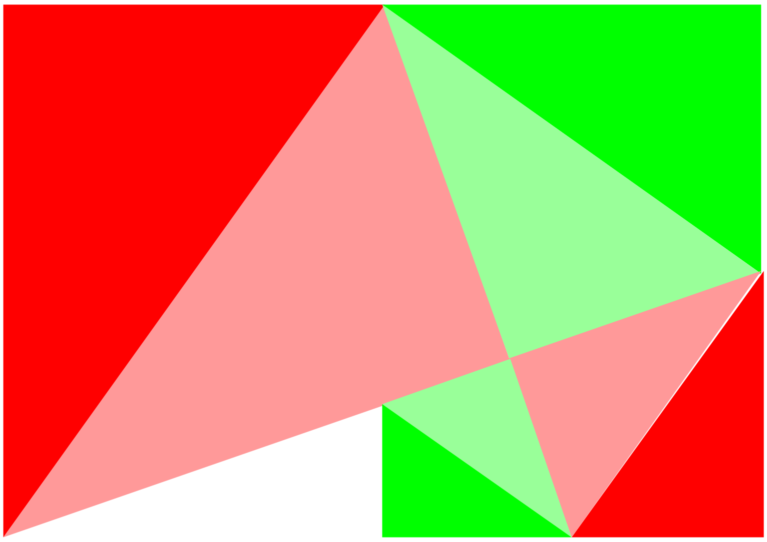
2.1.2 DIN Rechteck

Beim DIN Rechteck gibt es wiederum nur eine Variante, die hat es aber in sich.



DIN Rechteck

Die Sehnenvierecke sind in diesem Fall sogar Drachenvierecke.



DIN Drachen