

Hans Walser, [20180703]

Rechter Winkel?

1 Worum geht es?

Es wird eine Vermutung um einen Schnittwinkel untersucht, die sich als falsch erweist.

2 Tangenskurve und gespiegelte Sinuskurve

Die Abbildung 1 zeigt die Tangenskurve und die gespiegelte Sinuskurve. Sie schneiden sich im Ursprung unter einem rechten Winkel.

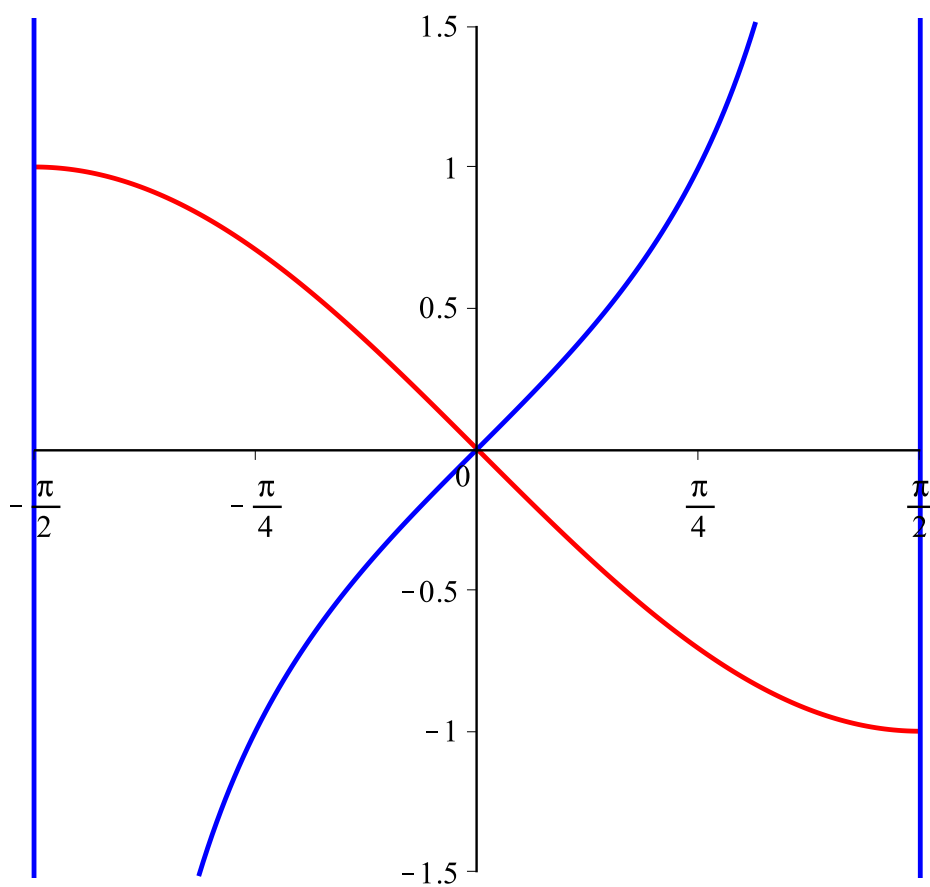


Abb. 1: Tangenskurve und gespiegelte Sinuskurve

3 Verschieben der gespiegelten Sinuskurve

Die Frage ist, ob der rechte Winkel erhalten bleibt, wenn wir die gespiegelte Sinuskurve vertikal verschieben (Abb. 2).

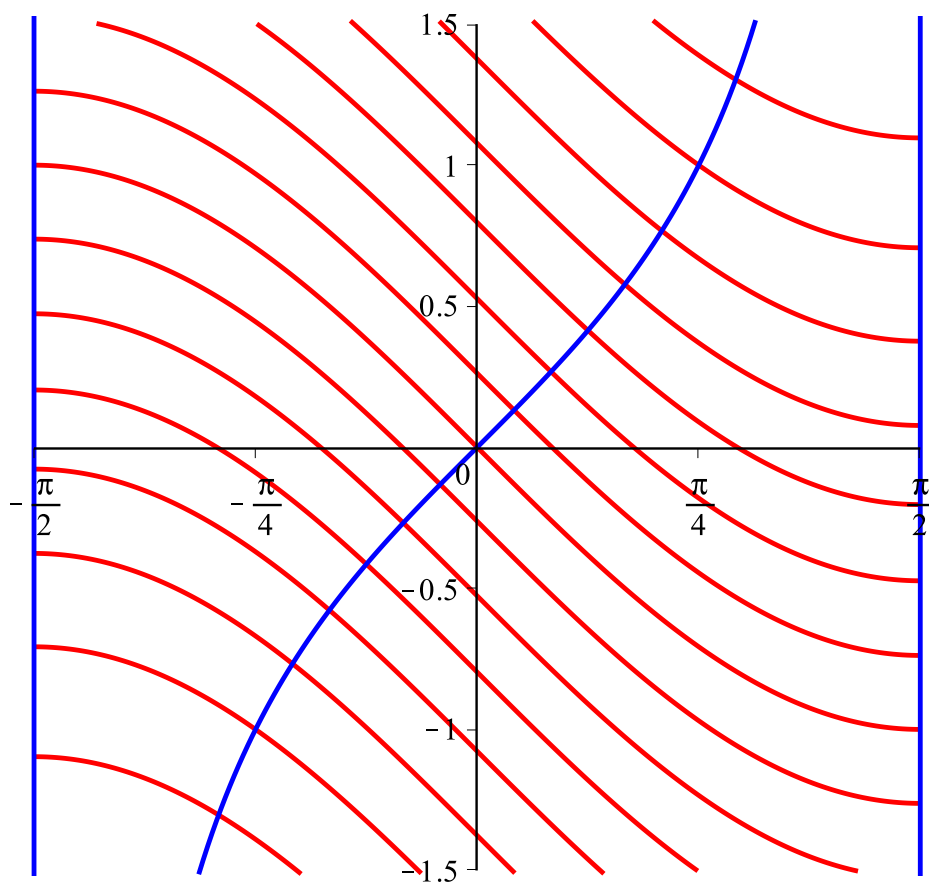


Abb. 2: Verschieben der gespiegelten Sinuskurven

4 Schnittwinkel

Die Tabelle 1 zeigt die Schnittwinkel für einige Verschiebungen nach oben.

n	Verschiebung	Schnittwinkel
0	0	90°
1	0.2621786898	90.24611987°
2	0.5267682375	90.99178088°
3	0.7968969950	92.25168311°
4	1.077350269	94.02349700°
5	1.376088417	96.24014145°
6	1.707106781	98.69933846°
7	2.096578713	100.9972166°
8	2.598076212	102.5288077°
9	3.338093094	102.6094721°
10	4.697976634	100.6784547°
11	8.587198980	96.46049889°

Tab. 1: Schnittwinkel

Die Winkel werden größer als 90°. Allerdings nehmen sie dann wieder ab und im Grenzfall haben wir wieder einen rechten Winkel.

Die Abbildung 3 zeigt den Winkel in $^{\circ}$ in Abhängigkeit von der Verschiebung.

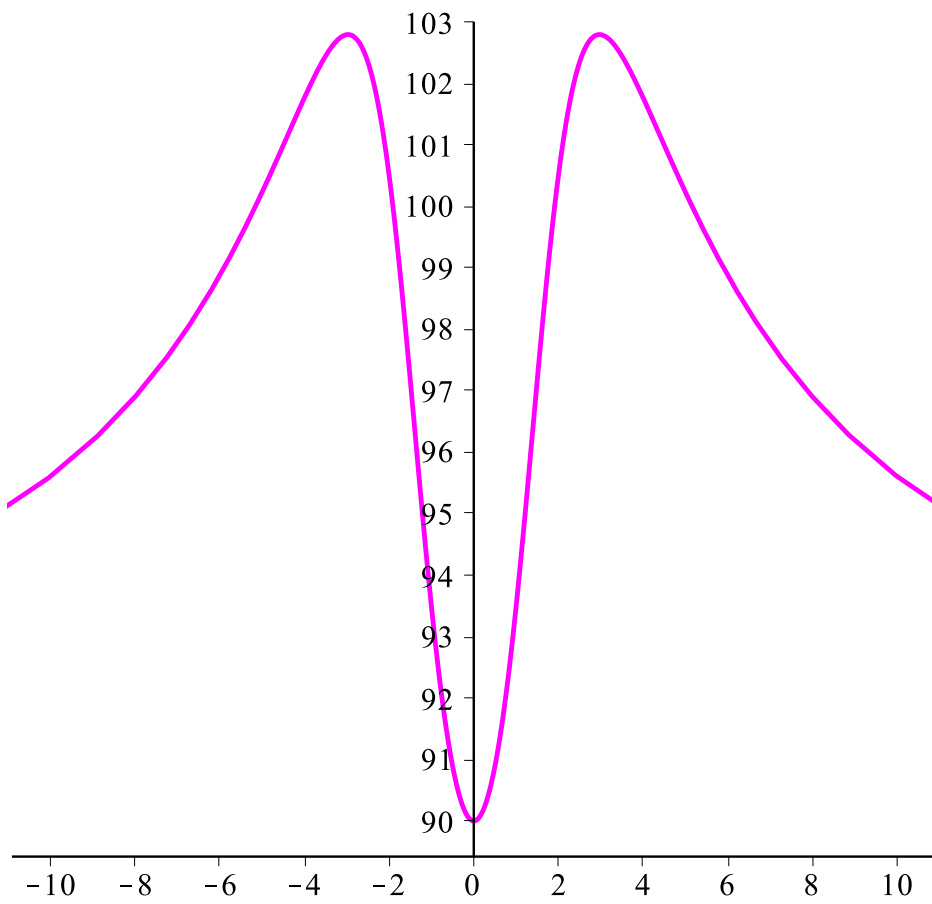


Abb. 3: Verschiebung und Winkel

Die Abbildung 4 zeigt einen größeren Verschiebungsausschnitt.

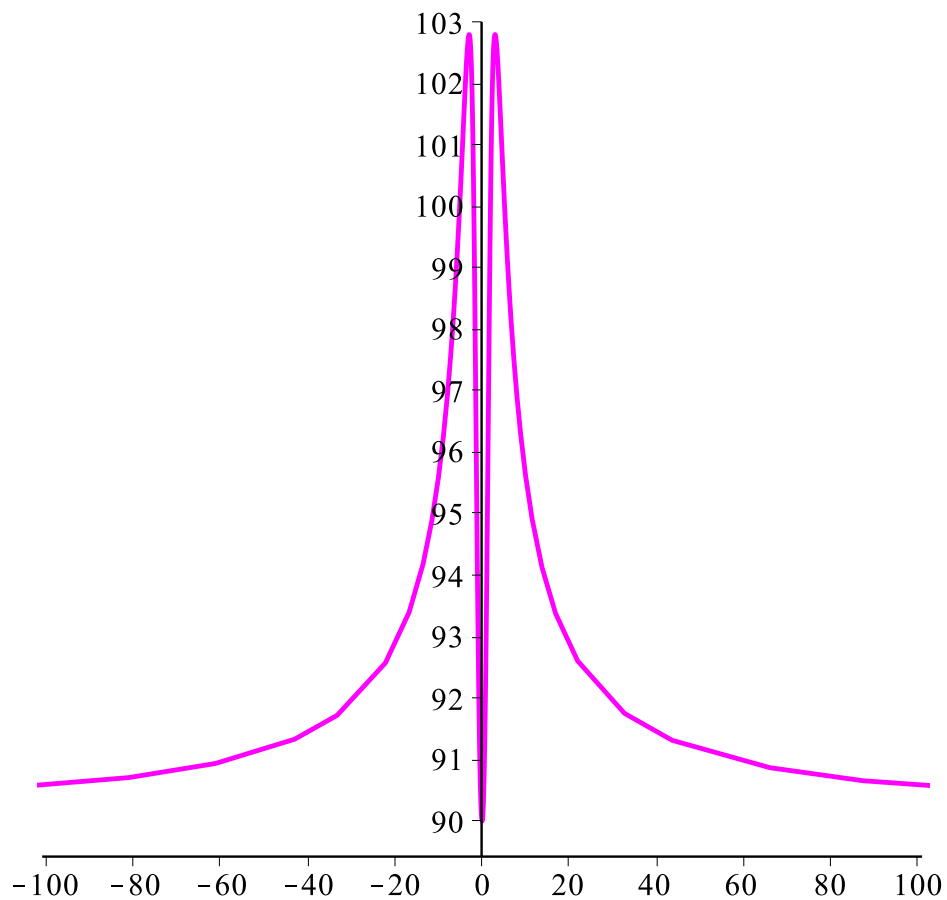


Abb. 4: Größerer Ausschnitt

5 Winkelberechnung

Mit t_0 bezeichnen wir die x -Koordinate des Schnittpunktes. Der Schnittpunkt S hat damit die Koordinaten:

$$S(t_0, \tan(t_0)) \quad (1)$$

Um diesen Schnittpunkt zu erhalten, benötigen wir für die gespiegelte Sinuskurve die Verschiebung d :

$$d = \tan(t_0) \sin(t_0) \quad (2)$$

Die Tangenskurve hat im Schnittpunkt S den Richtungsvektor \vec{v} :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\cos^2(t_0)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Die gespiegelte Sinuskurve hat im Schnittpunkt S den Richtungsvektor \vec{w} :

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\cos(t_0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Für den Schnittwinkel α der beiden Vektoren erhalten wir:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{1 - \frac{1}{\cos(t_0)}}{\sqrt{1 + \cos^2(t_0)} \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4(t_0)}}} \right) \quad (5)$$

Der Schnittwinkel α ist also kein konstanter rechter Winkel.