Hans Walser, [20161219]

Reuleaux-Dreieck

1 Worum geht es?

Es wird die elliptische Bewegung eines Reuleaux-Dreieckes in einem Quadrat illustriert.

2 Gleichdick

Das Reuleaux-Dreieck ist in jeder Richtung gleich dick. Es kann daher in beliebiger Position so in einen gleich dicken Streifen eingelegt werden, dass in jeder Position Ober- und Unterkante des Streifens berührt werden (Abb. 1).

Insbesondere kann es auch in die Schnittfigur zweier gleich breiter Streifen (Rhombus) berührend eingelegt werden. Wir untersuchen den Sonderfall des Quadrates.

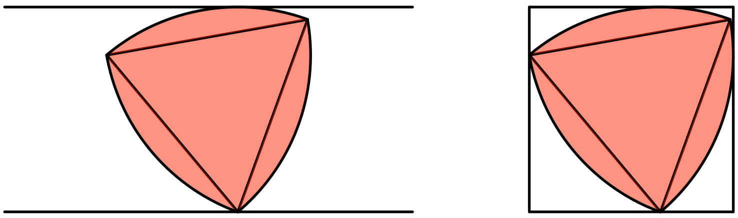

Abb. 1: Reuleaux-Dreieck in Streifen und Quadrat

Die GeoGebra-Animation A1 illustriert die Bewegung im Quadrat.

3 Elliptische Bewegung

3.1 Keine Drehung

Das Reuleaux-Dreieck dreht sich zwar im Quadrat, die Bewegung ist aber keine Drehung um einen festen Drehpunkt. Dies ist schon deshalb ausgeschlossen, weil sich die Ecken zeitweise auf den geraden Quadratseiten bewegen.

3.2 Ellipsenzirkel

Die beiden Endpunkte eines Stabes fester Länge sollen auf je einer von zwei gekreuzten Schienen verlaufen (Abb. 2). Dann beschreibt jeder beliebige Punkt auf dem Stab eine Ellipse. Die beiden Abschnitte des Stabes ergeben die Längen der langen und der kurzen Halbachse. Mit Geräten dieser Art hat man früher Ellipsen gezeichnet.

Der Mittelpunkt des Stabes beschreibt einen Kreis. Die beiden Endpunkte des Stabes beschreiben je eine Strecke. Beides sind Sonderfälle von Ellipsen.

Auch die Punkte in den Verlängerungen des Stabes beschreiben Ellipsen.

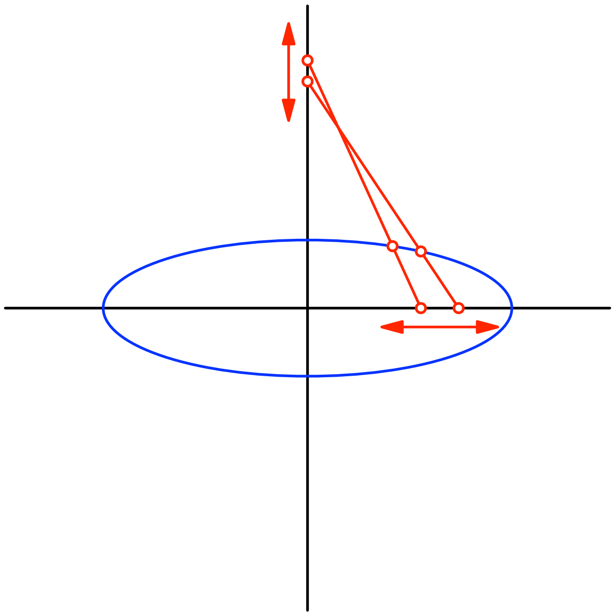

Abb. 2: Ellipsenzirkel

Mehr noch: Wir können an den Stab eine Ebene heften, die mitbewegt wird. Jeder Punkt dieser Ebene beschreibt eine Ellipse in der Grundebene, in welcher die Kreuzschienen liegen.

Die Schienen müssen sich nicht orthogonal kreuzen. Es gibt auch bei schiefen Kreuzschienen Ellipsen.

3.3 Anwendung in unserem Beispiel

In jeder Position des Reuleaux-Dreiecks im Quadrat berühren (mindestens) zwei der drei Ecken je eine Quadratseite, welche orthogonal zueinander stehen(Abb. 3).

Daher funktioniert die Angelegenheit wie ein Ellipsenzirkel. Jeder Punkt des Reuleaux-Dreiecks beschreibt eine Ellipse, wenigsten so lange, als beide Eckpunkt ihre Quadratseite berühren.

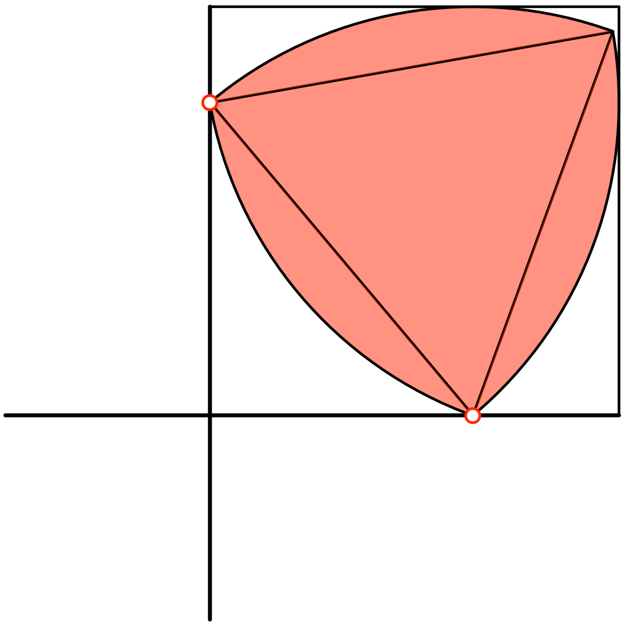

Abb. 3: Ellipsenzirkel im Quadrat

Nun hat aber das Quadrat vier rechte Winkel und damit vier Kanten, die als Kreuzschienen fungieren können. Außerdem sind es im Wechsel immer zwei andere der drei Ecken des Reuleaux-Dreieckes, welche auf einer Quadratseite sich bewegen. Daher ist die Bahnkurve eines Punktes des Reuleaux-Dreiecks aus vier Ellipsenbögen zusammengesetzt. Wir haben also eine Zusammensetzung von vier elliptischen Bewegungen.

Die GeoGebra-Animation A1 ist daher aus vier konsekutiven Animationen zusammengesetzt, von denen immer nur eine aktiv ist. Drei sind inaktiv, daher die vielen „undefiniert“-Notationen im algebraischen Begleittext. Technisch wird das mit Fallunterscheidungen für den Parameter t gehandhabt.

Da die Kreuzschienen auch schief zueinander stehen dürfen, gilt entsprechendes für ein Reuleaux-Dreieck, das sich in einem Rhombus bewegt.

3.4 Bahnkurve des Mittelpunktes

In der GeoGebra-Animation A1 ist blau der Mittelpunkt des Reuleaux-Dreieckes eingezeichnet. Optisch sieht es so aus, als würde er sich auf einem Kreislein bewegen. In Wirklichkeit ist seine Bahnkurve ebenfalls aus vier Ellipsenbögen zusammengesetzt.

Die Abbildung 4 zeigt die vier Ellipsen. Der Mittelpunkt des Reuleaux-Dreiecks bewegt sich auf den innersten kleinen Ellipsenbögen.

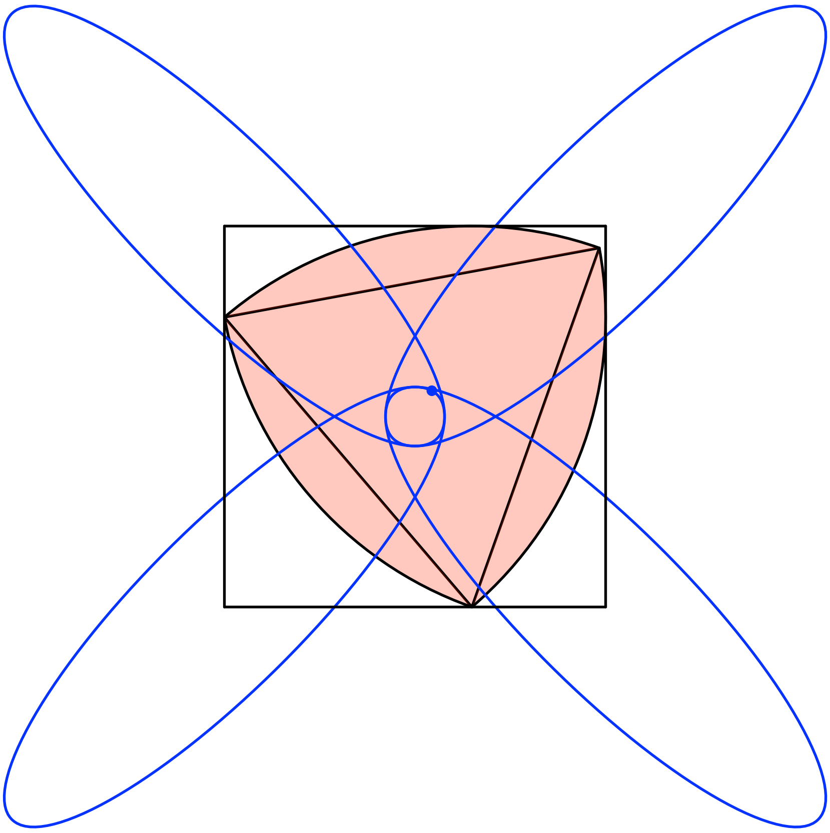

Abb. 4: Die vier Ellipsen

Die Ellipsen haben ihre Zentren in den Quadratecken. Die Achsen sind parallel zu den Quadratdiagonalen. In einem Quadrat der Seitenlänge 1 haben die Ellipsen eine lange Halbachse $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \approx 0.7887$ und eine kurze Halbachse $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \approx 0.2113$. Die beiden Halbachsen ergänzen sich auf 1.

Die GeoGebra-Animation A2 zeigt die Bewegung des Mittelpunktes auf den Bahnellipsen. Das Reuleaux-Dreieck dreht sich im positiven Drehsinn, sein Mittelpunkt kurvt aber im negativen Drehsinn.