Hans Walser, [20210207]

Rhomben

1 Worum geht es?

Eine Schließungsfigur mit ähnlichen Rhomben

2 Schritt für Schritt

Wir zeichnen zwei ähnliche rote Rhomben, welche eine spitze Ecke in U (U ist der Nullpunkt des x-y-Koordinatensystems) gemeinsam haben. Die Ähnlichkeit der Rhomben legen wir durch das Diagonalenverhältnis v (kurze Diagonale zu lange Diagonale) fest.

Die Abbildung 1 zeigt die Situation für $v = ½$.

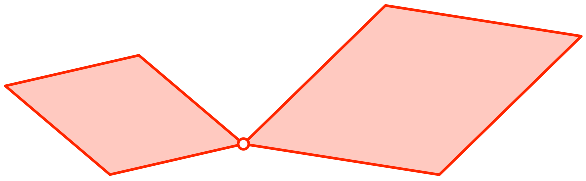

Abb. 1: Zwei ähnliche Rhomben

Nun passen wir zwischen die stumpfen Ecken der roten Rhomben zwei weitere Rhomben (blau) ein, welche ähnlich sind zu den roten (Abb. 2).

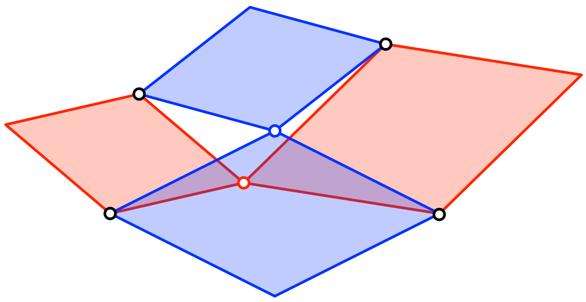

Abb. 2: Zwei weitere Rhomben

Die beiden neu eingefügten Rhomben haben eine Ecke gemeinsam. Wir haben eine Schließungsfigur. Die Schließungsfigur ist struktursymmetrisch.

Natürlich könnten wir auch zwei stumpfe Ecken in U legen und entsprechend dual weiterfahren.

3 Beweis

Der Beweis ist eine idyllische Rechenaffäre. Für den Start verwenden wir die Bezeichnungen der Abbildung 3.

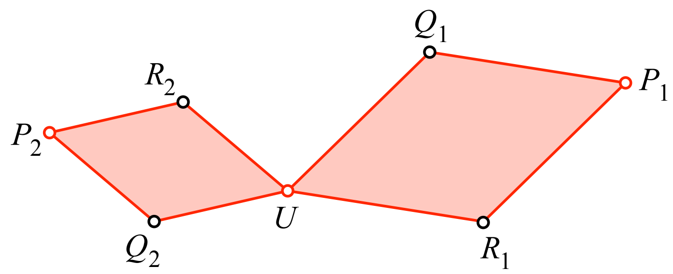

Abb. 3: Bezeichnungen

Die Situation der beiden Rhomben ist durch v sowie P_1 und P_2 gegeben. Wir setzen:

$$P_1 := [x_1, y_1]$$

$$P_2 := [x_2, y_2]$$

Damit lassen sich die Koordinaten der Punkte Q_1 und Q_2 sowie R_1 und R_2 berechnen:

$$Q_1 := \left[\frac{x_1}{2} - \frac{v\,y_1}{2}, \frac{y_1}{2} + \frac{v\,x_1}{2}\right]$$

$$R_1 := \left[\frac{x_1}{2} + \frac{v\,y_1}{2}, \frac{y_1}{2} - \frac{v\,x_1}{2}\right]$$

$$Q_2 := \left[\frac{x_2}{2} - \frac{v\,y_2}{2}, \frac{y_2}{2} + \frac{v\,x_2}{2}\right]$$

$$R_2 := \left[\frac{x_2}{2} + \frac{v\,y_2}{2}, \frac{y_2}{2} - \frac{v\,x_2}{2}\right]$$

Nun setzen wir oben einen blauen Rhombus ein (Abb. 4).

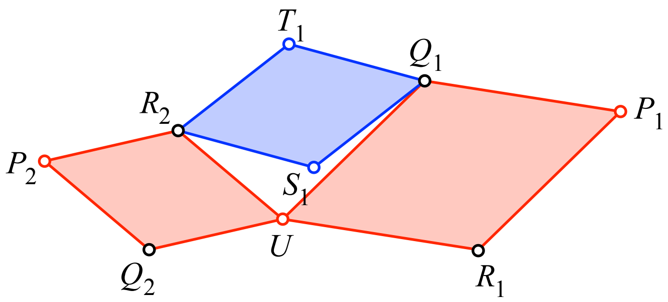

Abb. 4: Eingesetzter Rhombus

Für die freien Ecken erhalten wir:

$$S_1 := \left[\frac{(v^2+1)(x_1+x_2)}{4}, \frac{(v^2+1)(y_1+y_2)}{4}\right]$$

$$T_1 := \left[\frac{(-x_1-x_2)v^2}{4} + \frac{(-2y_1+2y_2)v}{4} + \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4}, \frac{(-y_1-y_2)v^2}{4} + \frac{(2x_1-2x_2)v}{4} + \frac{y_1}{4} + \frac{y_2}{4}\right]$$

Wir hätten ebenso gut den unteren Rhombus einsetzen können (Abb. 5).

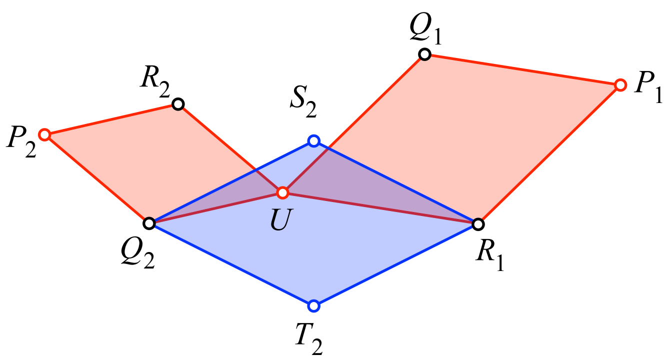

Abb. 5: Unterer Rhombus

Für dessen freie Ecken ergibt sich:

$$S_2 := \left[\frac{(v^2+1)(x_1+x_2)}{4}, \frac{(v^2+1)(y_1+y_2)}{4}\right]$$

$$T_2 := \left[\frac{(-x_1-x_2)v^2}{4} + \frac{(2y_1-2y_2)v}{4} + \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4}, \frac{(-y_1-y_2)v^2}{4} + \frac{(-2x_1+2x_2)v}{4} + \frac{y_1}{4} + \frac{y_2}{4}\right]$$

Wir sehen, dass S_1 und S_2 übereistimmen. Damit ist die Schließungseigenschaft gezeigt.

4 Iteration

Die Abbildung 6 zeigt eine Iteration des Vorgehens.

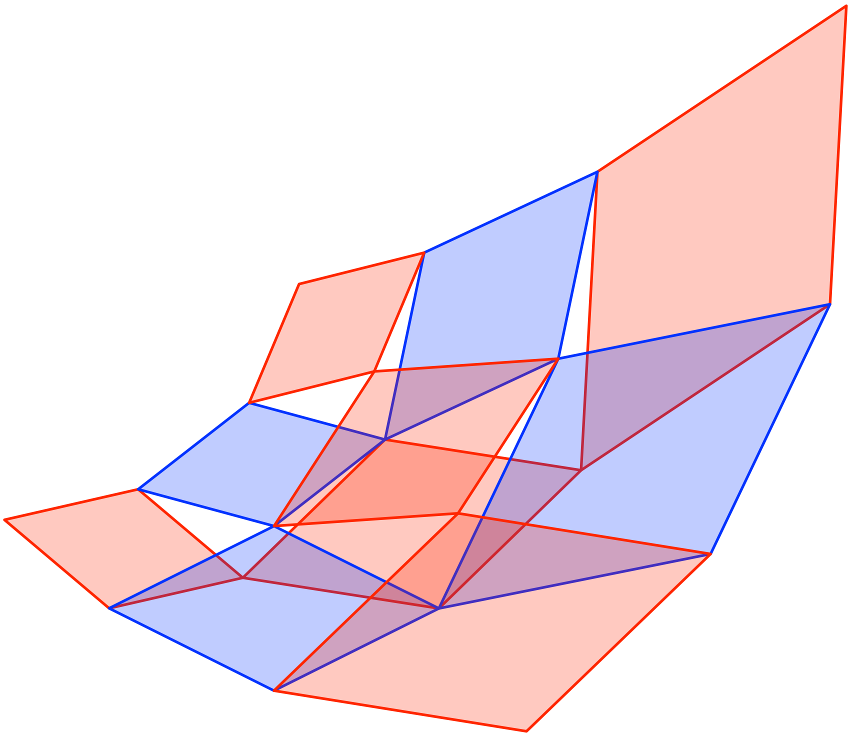

Abb. 6: Iteration

5 Details

Ohne Beweis einige weitere Eigenschaften.
Die beiden Diagonalen (Abb. 7) sind orthogonal. Ihr Längenverhältnis ist v.

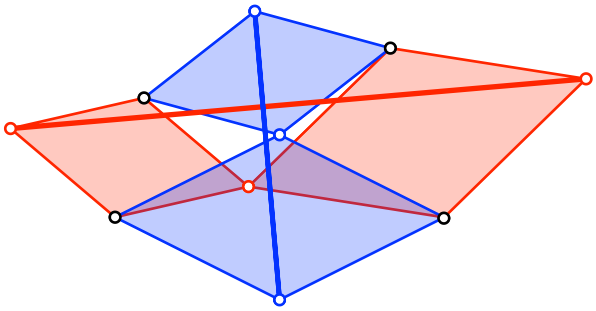

Abb. 7: Diagonalen

Die beiden schwarzen Verbindungen der Gelenkpunkte (Abb. 8) sind gleich lang. Ihr Schnittwinkel ist gleich dem Rhombenwinkel.

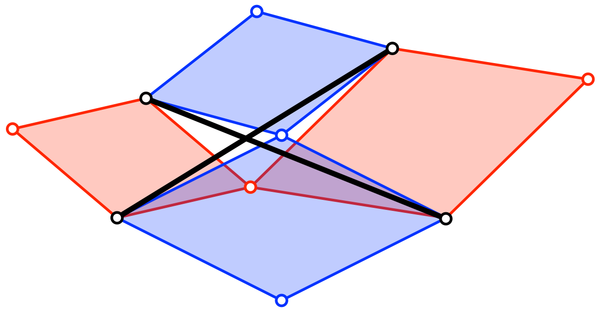

Abb. 8: Verbindungslinien

Die Mittelpunkte der vier Rhomben sind Eckpunkte eines weiteren Rhombus (Abb. 9). Dieser ist ähnlich zu den vier schon vorhandenen Rhomben.

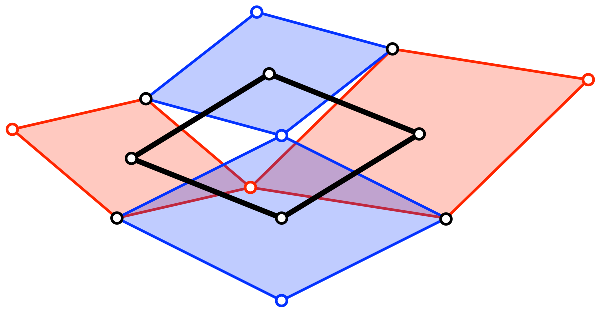

Abb. 9: Weiterer Rhombus

Im Sonderfall $v = 1$ erhalten wir Quadrate (Abb. 10). In diesem Sonderfall ist die Flächensumme der roten Quadrate gleich der Flächensumme der blauen Quadrate.

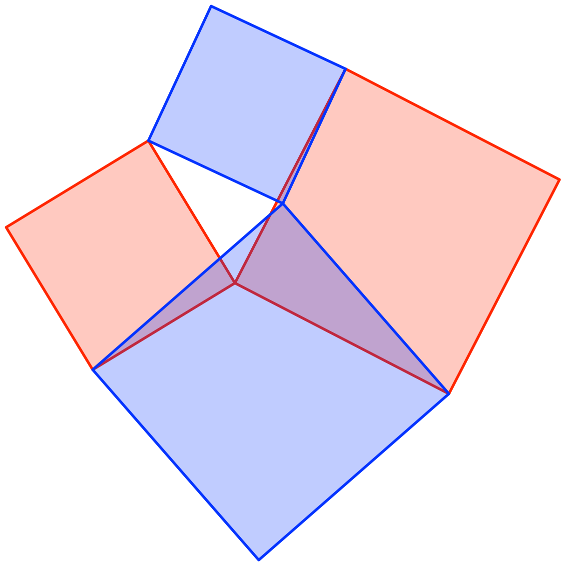

Abb. 10: Quadrate