

Hans Walser, [20200315]

Rhombendodekaederstumpf

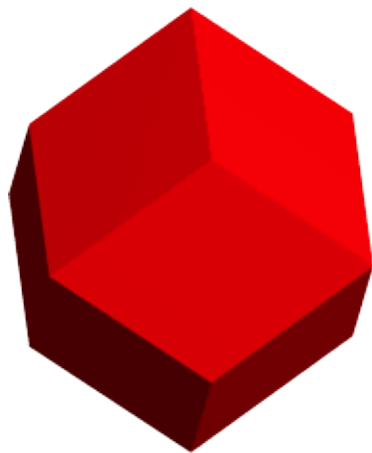
Anregung: F. R., L.

1 Worum geht es?

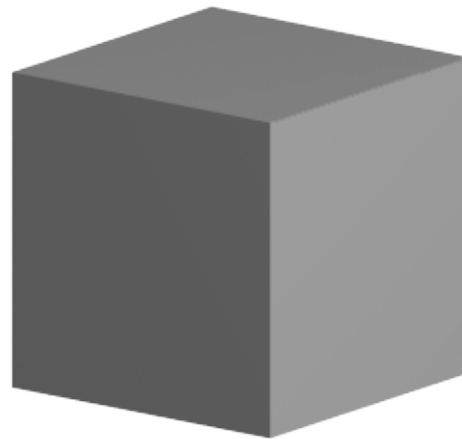
Frage nach Inkugel, Kantenberührkugel und Umkugel beim Rhombendodekaederstumpf.

2 Der Rhombendodekaederstumpf

Wir arbeiten mit einem Rhombendodekaeder und einem Würfel (Abb. 1).



a)



b)

Abb. 1: Rhombendodekaeder und Würfel

Die Abbildung 2 zeigt den Durchschnitt der beiden Körper.

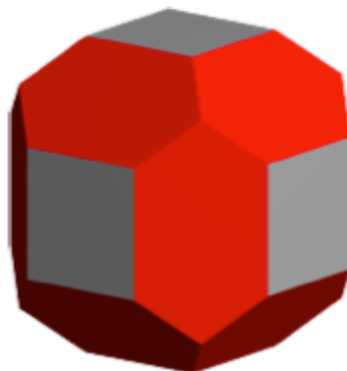


Abb. 2: Durchschnitt

Dieser Körper kann als Rhombendodekaederstumpf gesehen werden, indem beim Rhombendodekaeder diejenigen Ecken, an denen vier spitze Rhombenwinkel zusammenkommen, abgestumpft werden.

Der Körper kann aber auch als abgeschrägter Würfel gesehen werden. Beim Würfel werden „die Kanten gebrochen“ das heißt in einem Winkel von 45° abgeschrägt.

Im Folgenden wird mit dem Konzept des Rhombendodekaederstumpfs gearbeitet.

3 Kugeln

Zu einem räumlichen Polyeder kann es drei spezielle Kugeln geben.

- Die *Inkugel* berührt alle Seitenflächen. Beim Würfel mit der Kantenlänge 2 hat die Inkugel den Radius 1.
- Die *Kantenberührkugel* berührt, wie der Name sagt, alle Kanten. Beim Würfel mit der Kantenlänge 2 hat die Kantenberührkugel den Radius $\sqrt{2}$. Sie berührt die Kanten in den Kantenmitten.
- Die *Umkugel* verläuft durch alle Polyederecken. Beim Würfel mit der Kantenlänge 2 hat die Umkugel den Radius $\sqrt{3}$.

Wir fragen nun, unter welchen Bedingungen eine dieser Kugeln beim Rhombendodekaederstumpf existiert.

Bemerkung: Da es zu einem ebenen Polygon nur die Begriffe Inkreis und Umkreis gibt, geht in der schulischen Raumgeometrie der Begriff Kantenberührkugel oft unter.

3.1 Inkugel

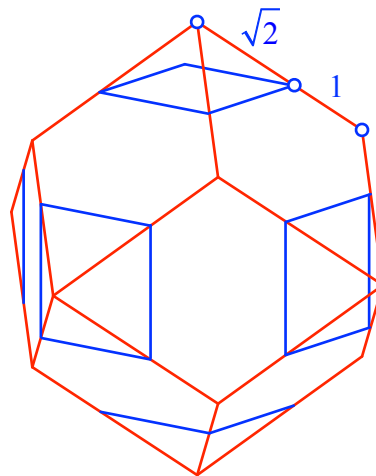


Abb. 3: Bedingung für Inkugel

Eine Inkugel gibt es genau dann, wenn die Kanten des Rhombendodekaeders im Verhältnis $\sqrt{2} : 1$ geteilt werden. Beweis durch Nachrechnen.

Die Abbildungen 1 und 2 basieren auf diesem Teilverhältnis.

Die Abbildung 4a zeigt den Rhombendodekaederstumpf transparent und die Inkugel. Die Abbildung 4b zeigt die hintere Hälfte des Rhombendodekaederstumpfs und die Inkugel. Die Halbierungsebene schneidet aus dem Rhombendodekaederstumpf ein regelmäßiges Achteck heraus. Dies erklärt das Auftreten von $\sqrt{2}$ in der Abbildung 3.

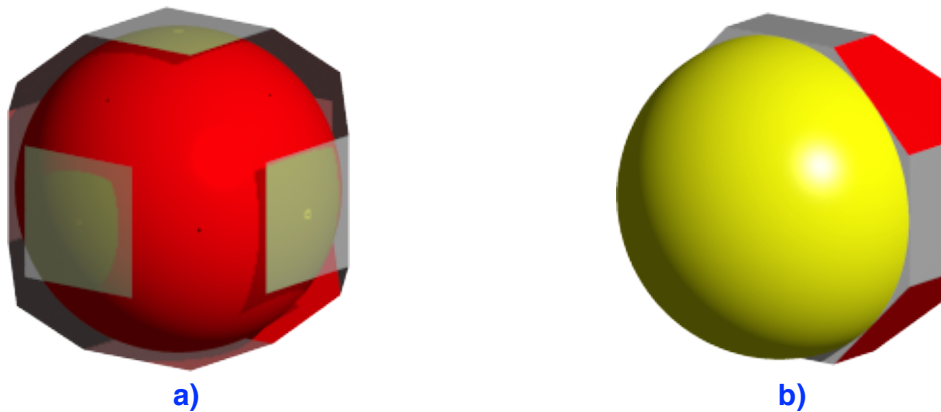


Abb. 4: Rhombendodekaederstumpf mit Inkugel

3.2 Kantenberührkugel

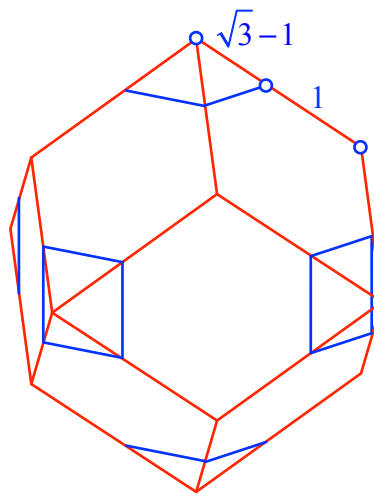


Abb. 5: Bedingung für Kantenberührkugel

Eine Kantenberührkugel gibt es genau dann, wenn die Kanten des Rhombendodekaeders im Verhältnis $(\sqrt{3}-1):1$ geteilt werden. Beweis durch Nachrechnen.

Die Abbildung 6a zeigt den Durchschnitt; in der Abbildung 6b ist die Kantenberührkugel eingezeichnet. Wir erhalten eine sphärische Kugelpackung von zwölf großen und sechs kleinen Kreisen.

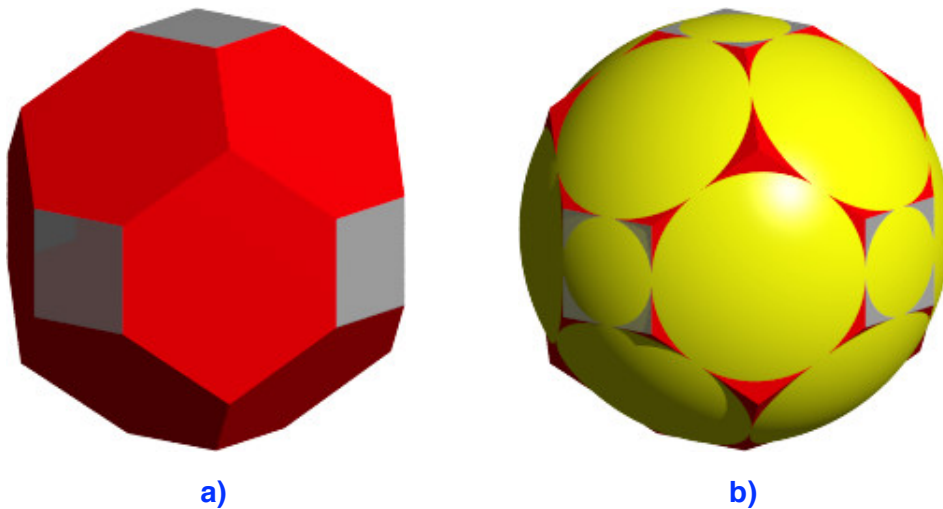


Abb. 6: Durchschnitt und Kantenberührkugel

3.3 Umkugel

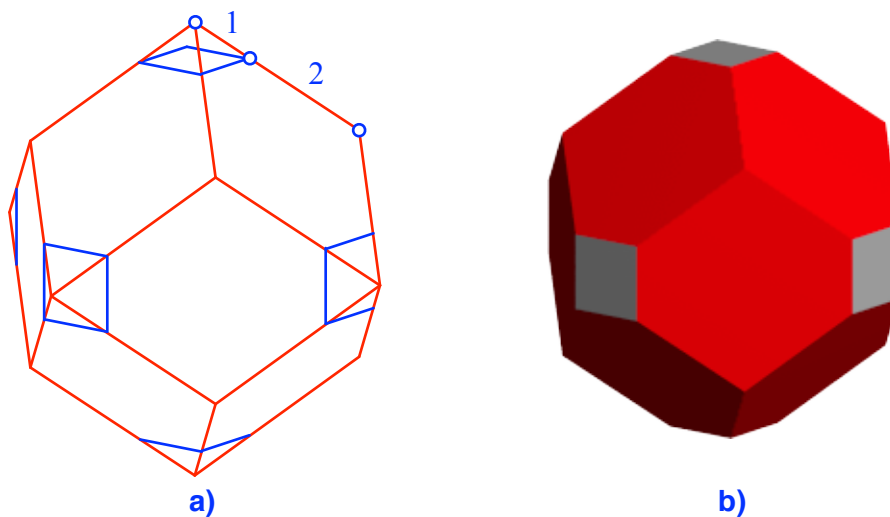


Abb. 7: Bedingung für Umkugel. Durchschnitt

Eine Umkugel gibt es genau dann, wenn die Kanten des Rhombendodekaeders im Verhältnis 1:2 geteilt werden (Abb. 7a). Beweis durch Nachrechnen. Die Abbildung 7b zeigt den Durchschnitt.

Die Abbildung 8 zeigt den Rhombendodekaederstumpf und die Umkugel in zwei verschiedenen Darstellungen.

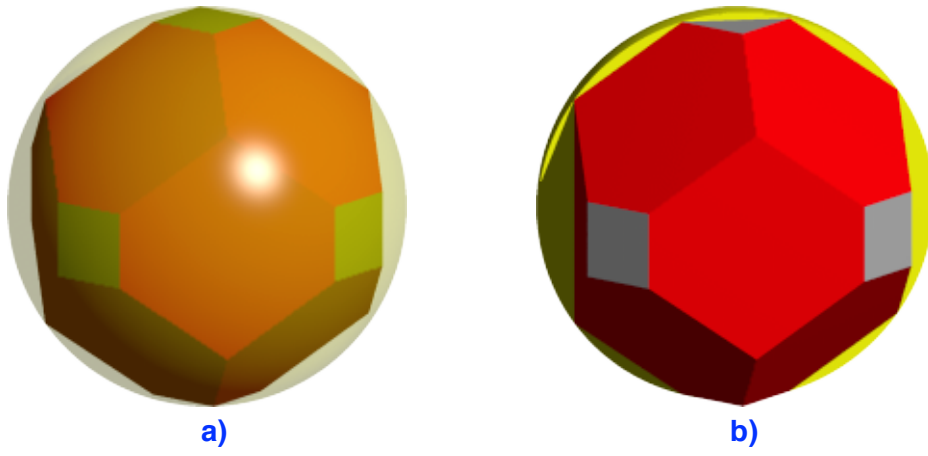


Abb. 8: Umkugel