

Hans Walser, [20160931]

Rhombenfiguren

1 Worum geht es

Es wird ein Beispiel einer Rhombenfigur vorgestellt, bei der im grafentheoretischen Sinne jeder Punkt den Grad 4 hat.

2 Problemstellung: Grad 4

Die Abbildung 1 zeigt eine klassische Rhombenfigur.

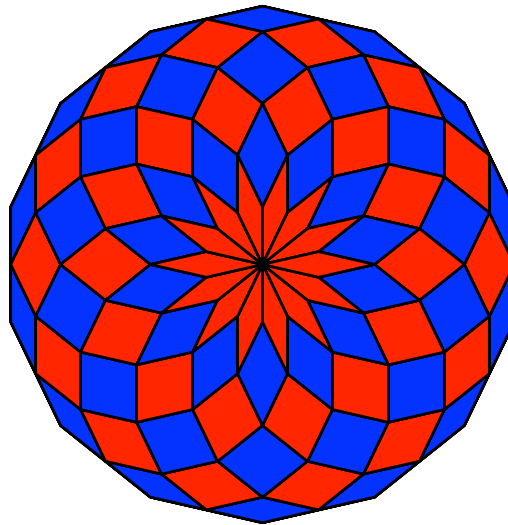


Abb. 1: Klassische Rhombenfigur

Im Zentrum haben wir einen Punkt vom Grad 14. Es kommen dort 14 Kanten zusammen. Die Punkte im nächsten Ring haben den Grad 3.

Dann kommen mehrere Ringe mit Punkten vom Grad 4.

Die äußersten Punkte haben nur den Grad 2.

Die Frage ist nun, ob es eine Rhombenfigur gibt, bei welcher sämtliche Punkte den Grad 4 haben.

Das einfachste Beispiel dazu ist das ins Unendliche ausgedehnte Schachbrettmuster.

Wir geben ein Beispiel mit nur endlich vielen Rhomben.

3 Das Beispiel

In einem Quadratraster zeichnen wir 16 Punkte ein (Abb. 2).

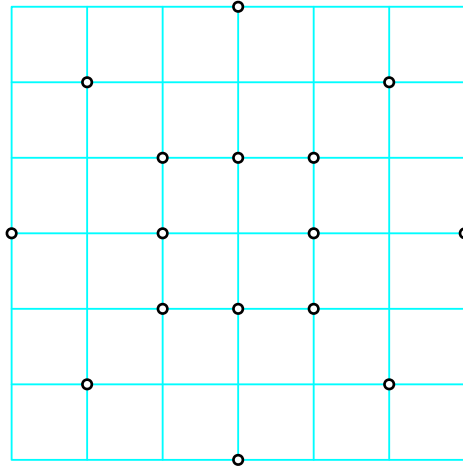


Abb. 2: 16 Punkte im Quadratraster

Diese Punkte verwenden wir als Eckpunkte von Rhomben (Abb. 3). Jeder Knoten hat den Grad 4. Die Figur ist endlich.

Die blauen Rhomben haben ein Diagonalenverhältnis 2:1. Die roten Rhomben haben ein Diagonalenverhältnis 3:1.

Das Umriss-Achteck ist zwar gleichseitig, aber nicht gleichwinklig. Es ist also nicht regelmäßig.

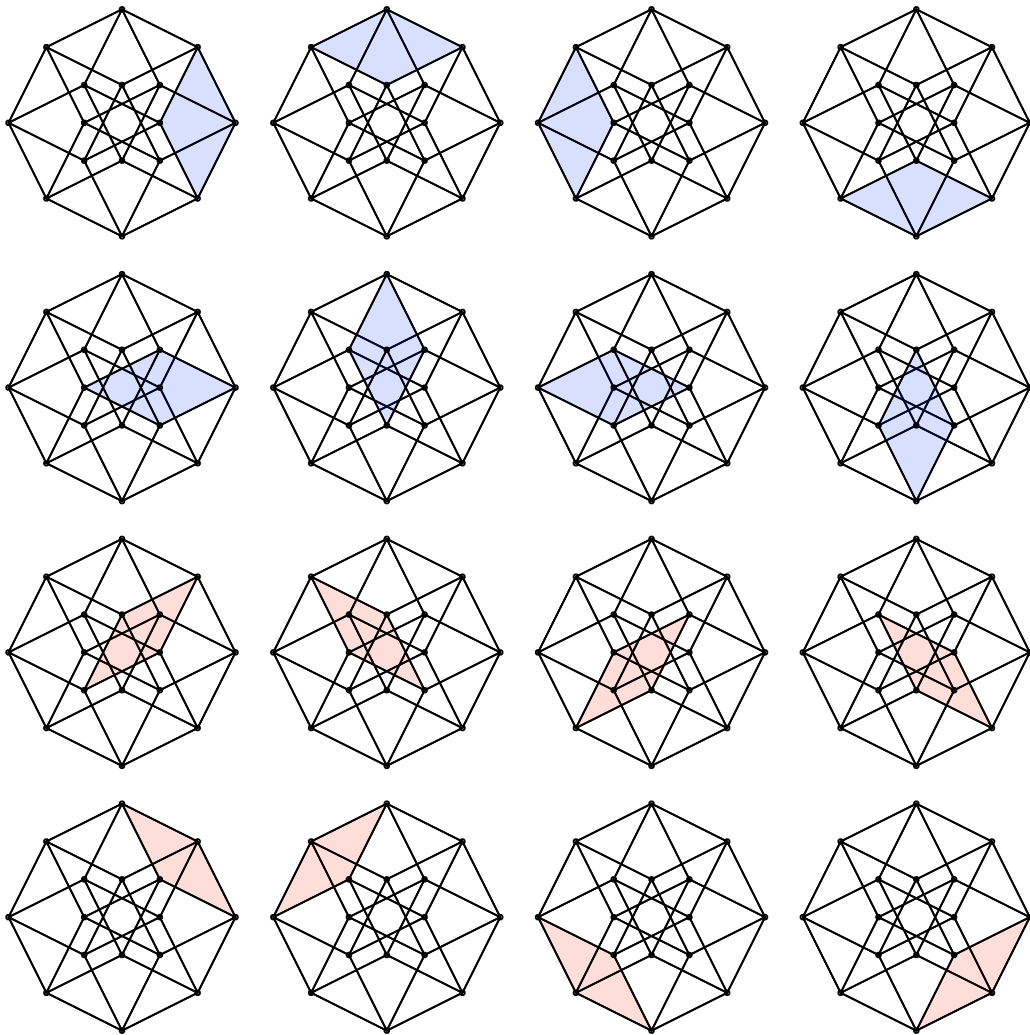


Abb. 3: Rhomben

Da die Rhomben sich überlappen, können wir nicht mehr von einer Zerlegung oder einem Parkett sprechen.

Die Abbildung 4 zeigt die Überlappung aller Rhomben.

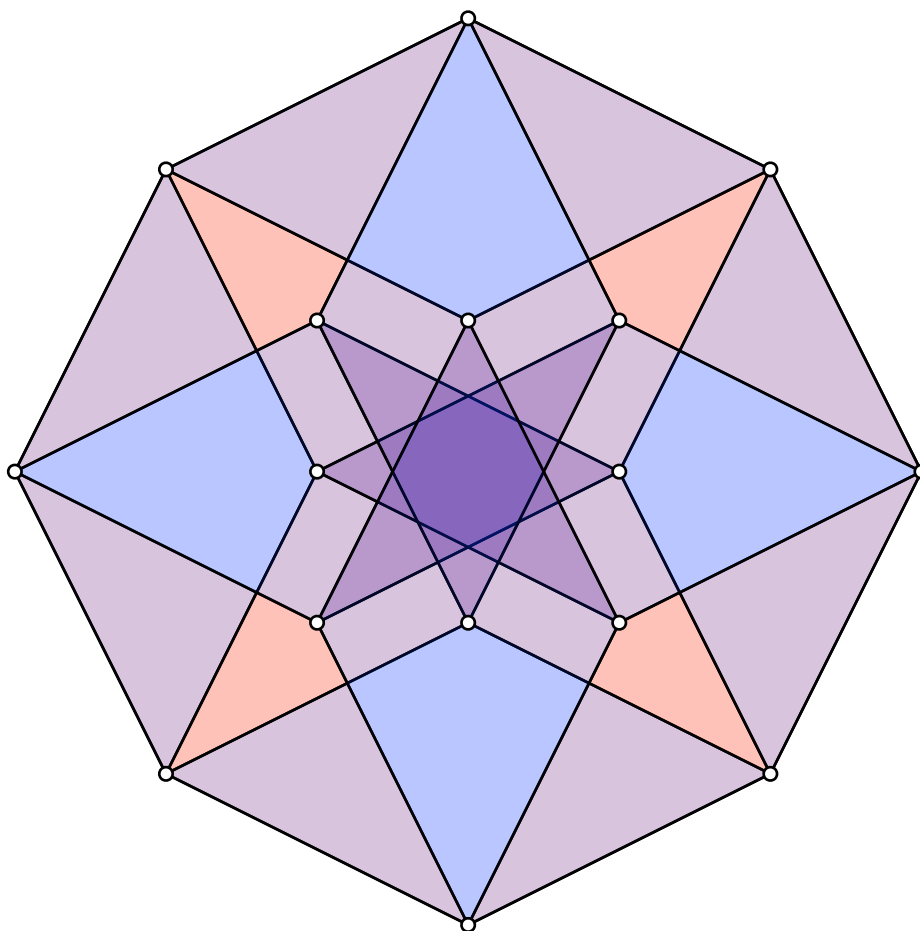


Abb. 4: Überlappung der Rhomben

4 Darstellung im Raum

Die Überlappungen versuchen wir räumlich darzustellen. Dazu denken wir uns verschiedene Höhen zu den einzelnen Knoten. Wir verwenden das Niveau 0 und die Niveaus $+a$ und $-a$. Die Abbildung 5 zeigt die mit Höhen versehenen Knoten.

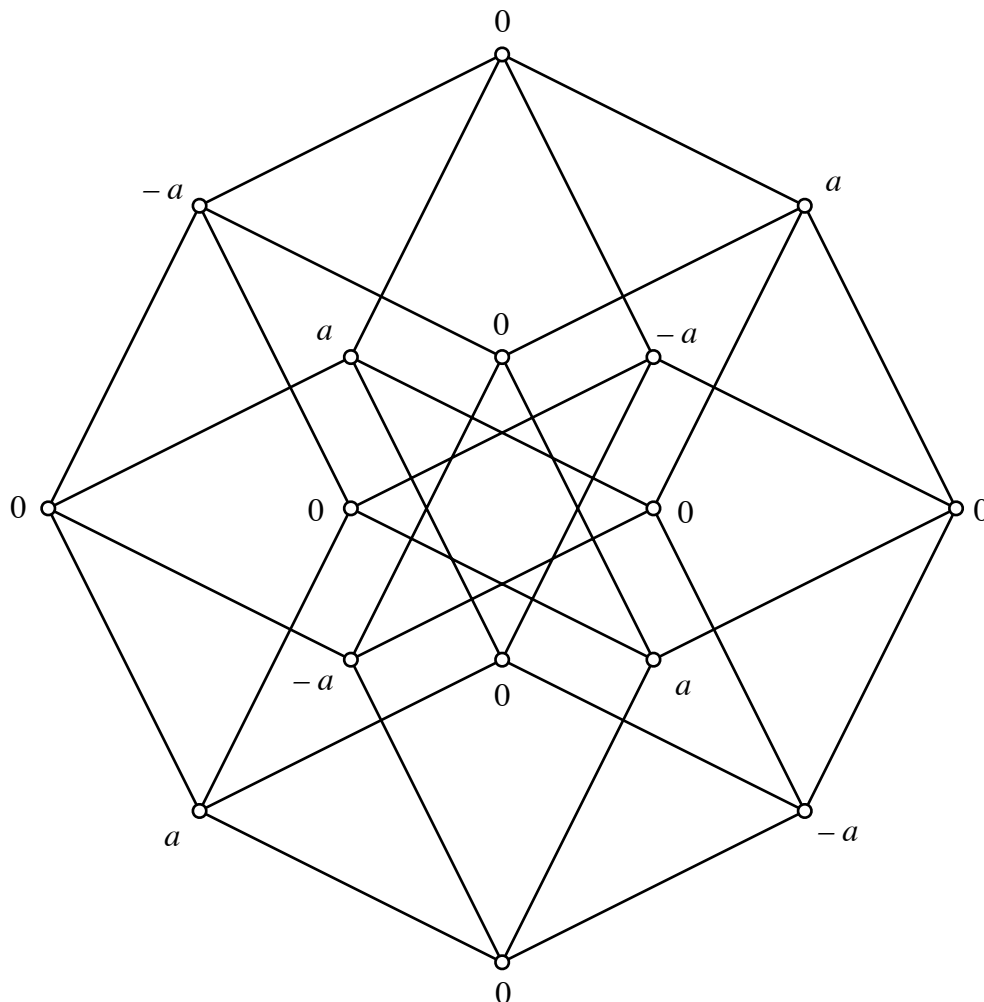


Abb. 5: Niveaus

Bei jedem Rhombus ist eine Diagonale auf dem Niveau null, also horizontal. Die andere Diagonale steigt vom Niveau $-a$ auf das Niveau $+a$ an. Damit ist sichergestellt, dass die vier Eckpunkte in einer Ebene liegen und der Rhombus nach wie vor als ebene Figur existiert.

Das Niveau a kann beliebig gewählt werden. In den folgenden Abbildungen 6 und 8 ist $a = \sqrt{3}$.

Die Abbildung 6 zeigt die Sicht von oben sowie eine allgemeine Ansicht. Aus den Überlappungen werden gegenseitige Durchdringungen. Die Rhomben also solche sind nicht mehr gut erkennbar.

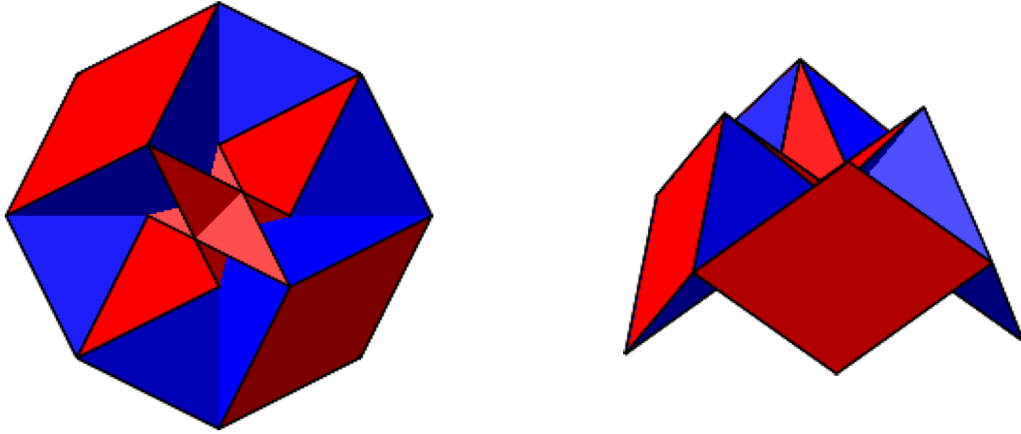


Abb. 6: Räumliches Modell

Die Abbildung 7 zeigt eine andere Möglichkeit die Niveaus zu setzen.

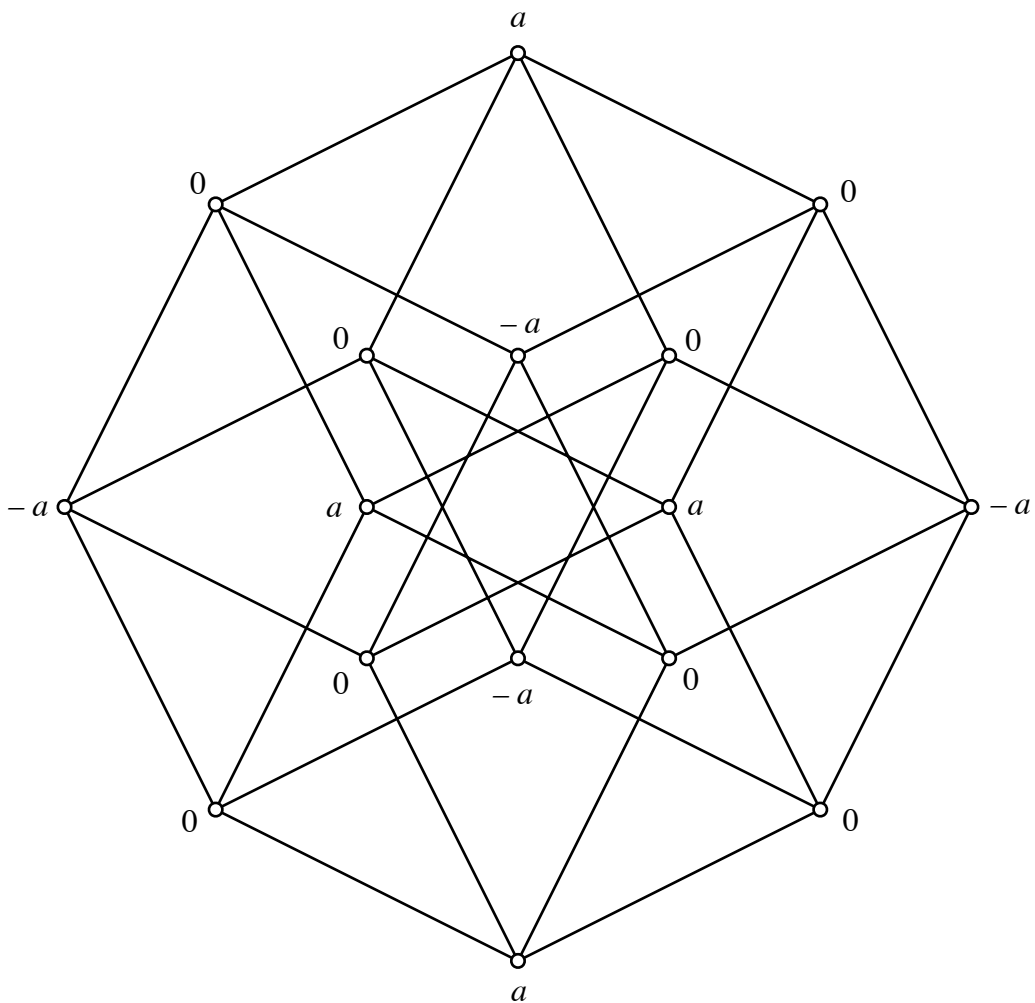


Abb. 7: Andere Niveausetzung

Die Abbildung 8 zeigt das zugehörige räumliche Modell.

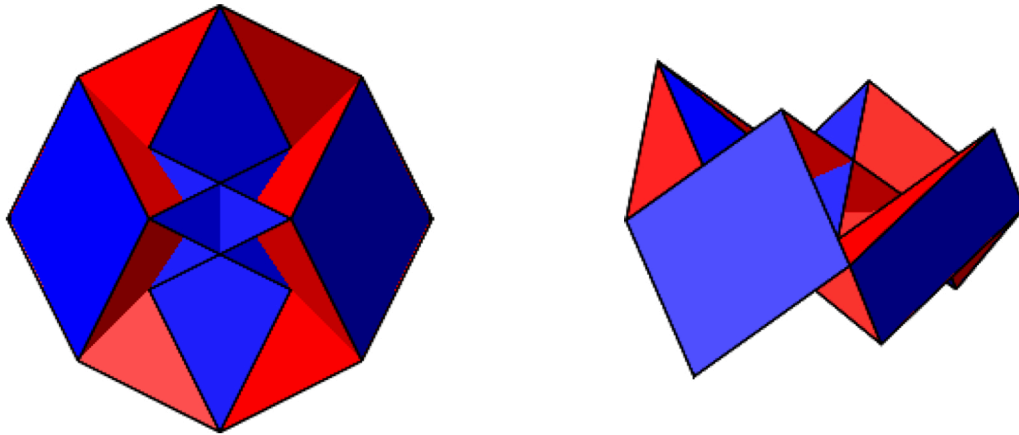


Abb. 8: Räumliches Modell

5 Quadrate

In der Abbildung 4 erkennen wir auch acht Quadrate. Allerdings sehen wir in den Abbildungen 5 und 7, dass die vier Eckpunkte dieser Quadrate nicht in einer Ebene liegen. Wir können sie also nicht als ebene Rhomben in unsere Modelle einbauen.

6 Topologie

6.1 Euler-Weg. Rösselsprung

Wegen dem Grad 4 ist der Graf der Abbildung 4 ein geschlossener Euler-Weg. Jede Strecke kann als Rösselsprung auf einem Schachbrett gesehen werden (Abb. 9).

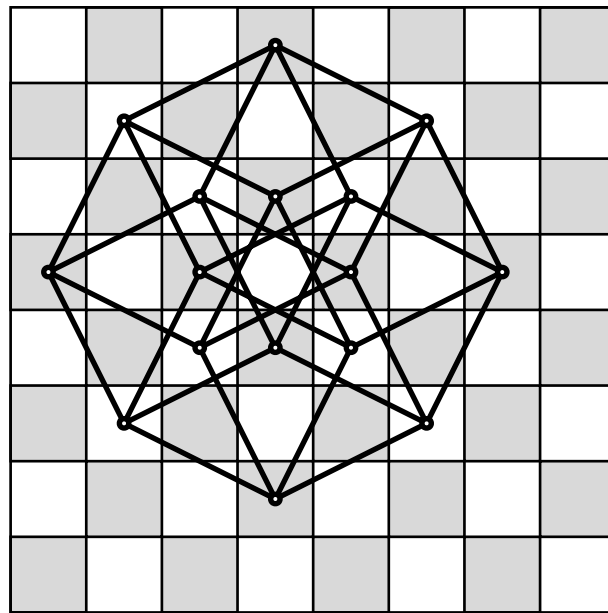


Abb. 9: Rösselsprung

6.2 Eulersche Charakteristik

Unsere Figur hat 16 Knoten, 32 Kanten und 16 Rhomben. Die Eulersche Charakteristik ist also null, wie beim Torus. Unser Modell ist aber kein Torus.

7 Knauthsche Figur

Die Abbildung 4 enthält im Zentrum die Knauthsche Figur (Abb. 10a) (Hoehn und Walser 2003).

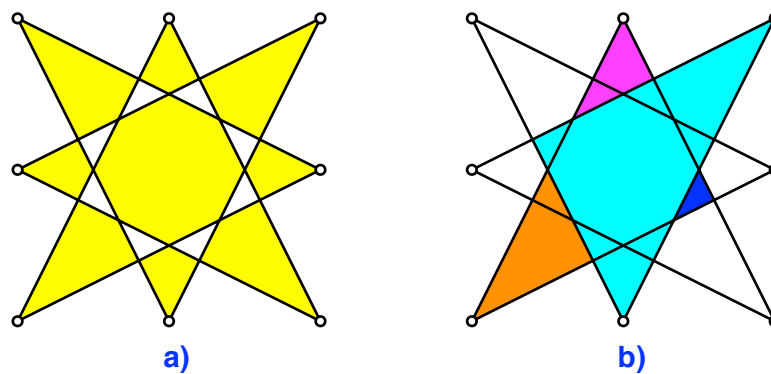


Abb. 10: Knauthsche Figur

Die Knauthsche Figur enthält das pythagoreische Dreieck mit dem Seitenverhältnis 3:4:5 in verschiedenen Größen (Abb. 10b).

Das größte dieser Dreiecke finden wir auch in der erweiterten Knauthschen Figur der Abbildung 4.

8 Vierdimensionaler Hyperwürfel

Die Abbildung 11 zeigt eine isometrische Projektion des vierdimensionalen Hyperwürfels. Das Umriss-Achteck ist nun regelmäßig. Alle Rhomben sind kongruent.

Viele unserer Überlegungen hätten wir auch an diesem Grafen durchführen können.

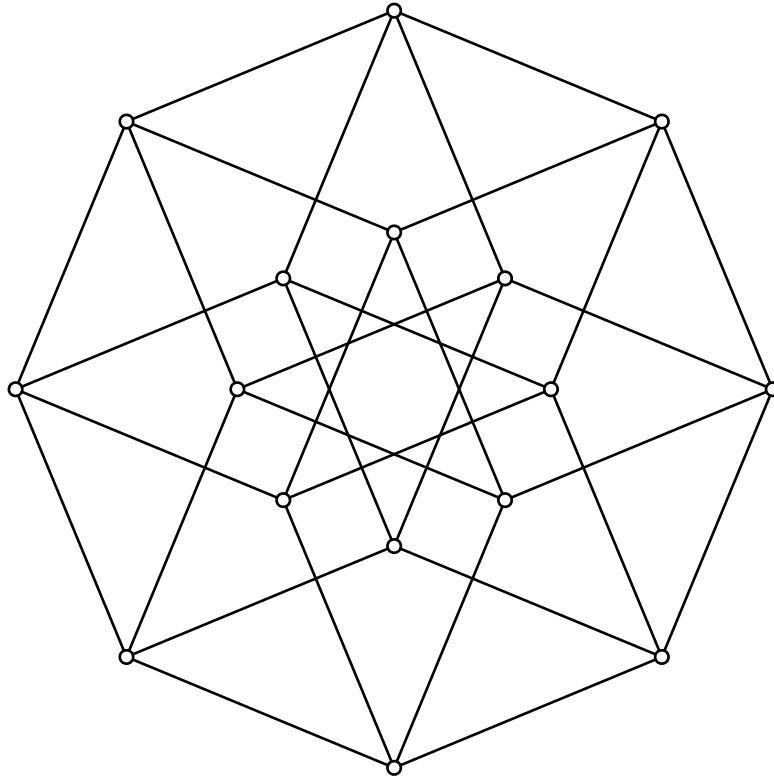


Abb. 11: Vierdimensionaler Hyperwürfel

Literatur

Hoehn, Alfred und Walser, Hans (2003): Gittergeometrie und pythagoreische Dreiecke. *Praxis der Mathematik* (5/45), 215-217.