Hans Walser, [20200217]

Regelmäßige Vielecke ungerader Eckenzahl am Dreieck

1 Worum geht es?

Spiel mit kollinearen Punkten, konstanten Teilverhältnissen und kopunktalen Geraden. Vermutungen.

2 Disposition

Es sei $u = 2m - 1$ eine ungerade Zahl, $u \geq 5$.

Einem beliebigen Dreieck $A_0A_1A_2$ setzen wir an den Seiten regelmäßige u-Ecke an (Abb. 1 für $u = 7$).

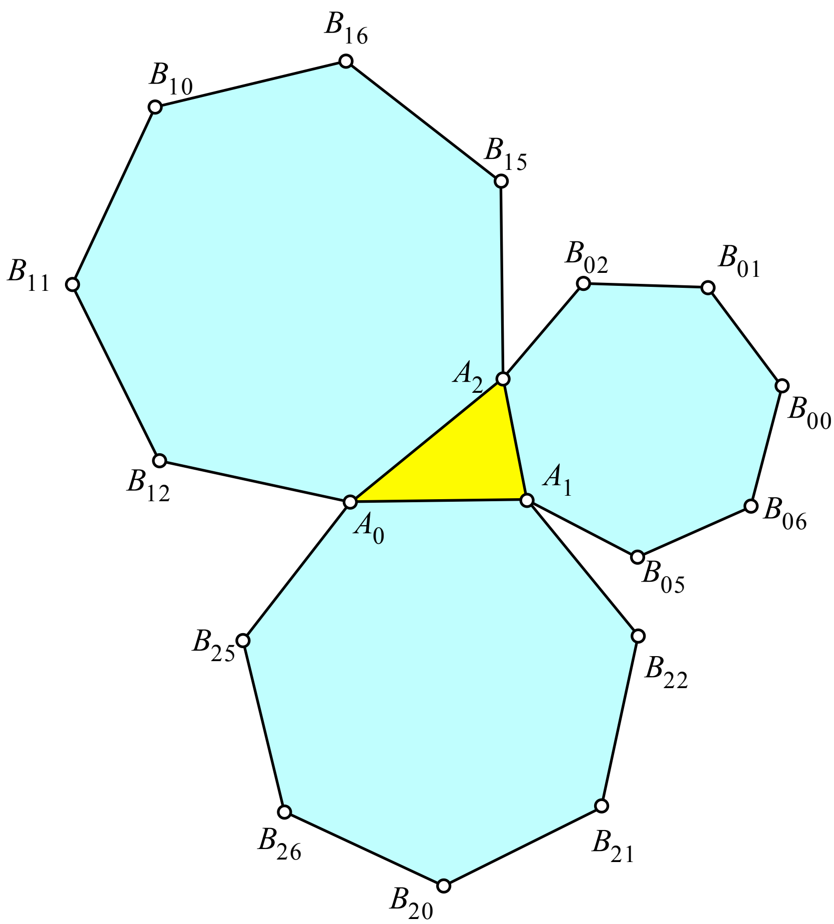

Abb. 1: Regelmäßige u-Ecke

Wir beschriften gemäß Abbildung 1. Es ist in der Zeichnung nicht eingetragen:

$$\begin{aligned} A_0 &= B_{1,m-1} = B_{2,m} \\ A_1 &= B_{2,m-1} = B_{0,m} \\ A_2 &= B_{0,m-1} = B_{1,m} \end{aligned} \tag{1}$$

Wir ergänzen die drei Punkte $B_{i+2,u-1}, A_i, B_{i+1,1}$, $i \in \{0,1,2\}$ (erster Index von B modulo 3) zum Parallelogramm $B_{i+2,u-1}A_iB_{i+1,1}C_i$ (Abb. 2).

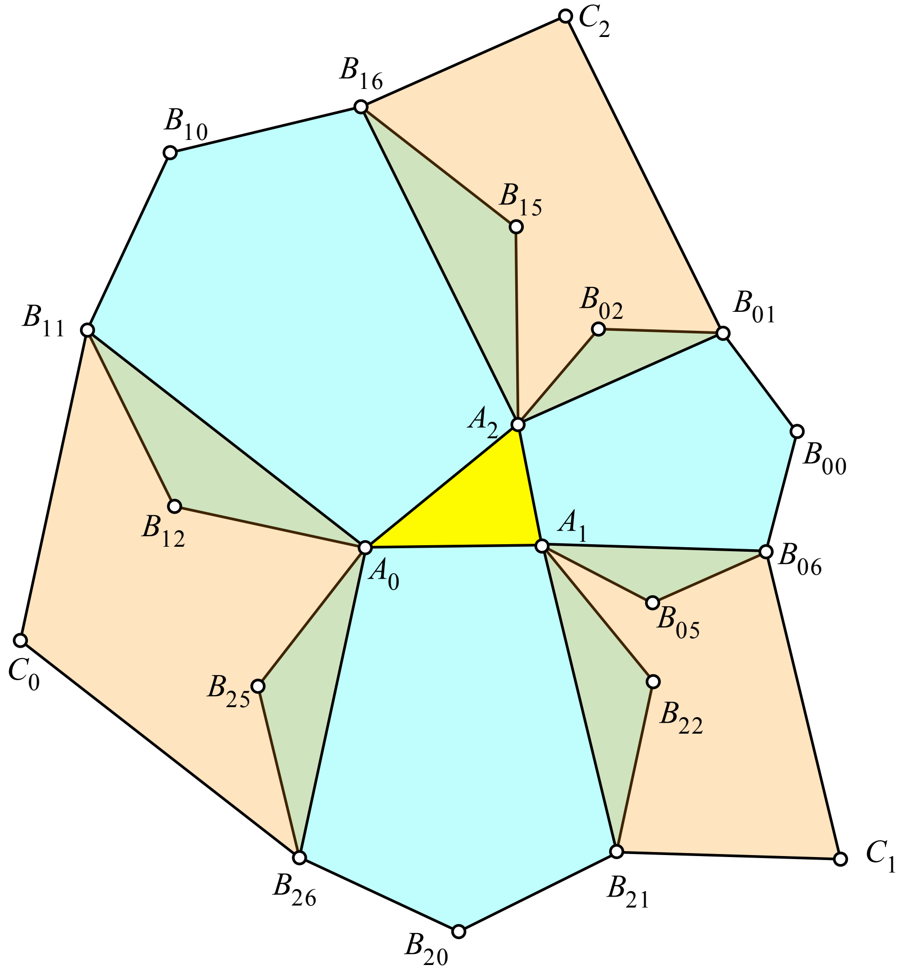

Abb. 2: Parallelogramme

3 Vermutungen

Die folgenden Vermutungen sind für $u = 5, 7, 9$ und 11 mit DGS numerisch überprüft.

3.1 Kollineare Punkte

Die Punkte $C_i, A_i, B_{i,0}, i \in \{0,1,2\}$ sind kollinear (Abb. 3).

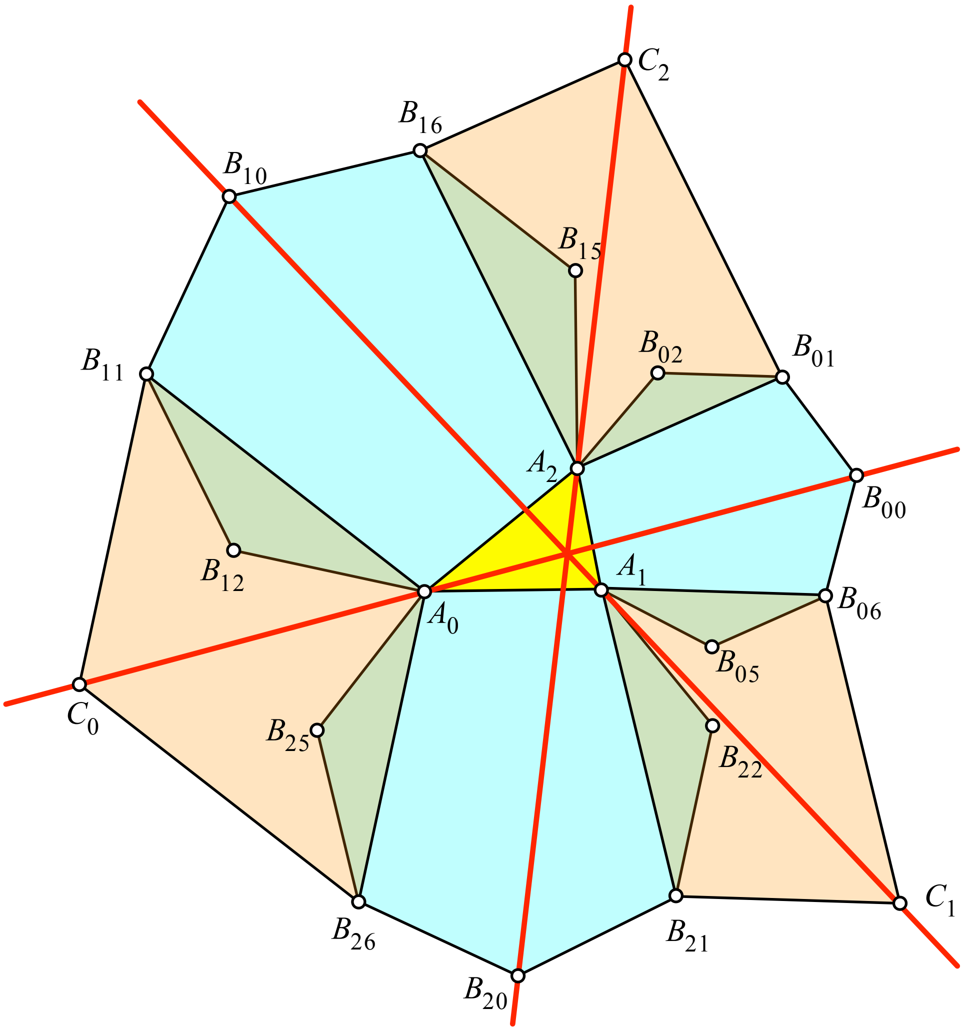

Abb. 3: Kollineare Punkte

3.2 Konstante Teilverhältnisse

$$\frac{\overline{C_0 A_0}}{\overline{A_0 B_{00}}} = \frac{\overline{C_1 A_1}}{\overline{A_1 B_{10}}} = \frac{\overline{C_2 A_2}}{\overline{A_2 B_{20}}} \tag{2}$$

3.3 Diagonalenverhältnis

Dieses Teilverhältnis v ist auch das Teilverhältnis der zweitlängsten zur längsten Diagonale im regelmäßigen u-Eck und kann wir folgt formalisiert werden:

$$v = \frac{\overline{C_0 A_0}}{\overline{A_0 B_{00}}} = \frac{\overline{C_1 A_1}}{\overline{A_1 B_{10}}} = \frac{\overline{C_2 A_2}}{\overline{A_2 B_{20}}} = \frac{\sin\left((m+1)\frac{\pi}{u}\right)}{\sin\left(m\frac{\pi}{u}\right)} \tag{3}$$

Die Tabelle 1 gibt die ersten numerischen Werte.

m	u	v
3	5	0.6180339887
4	7	0.8019377357
5	9	0.8793852415
6	11	0.9189859474
7	13	0.9418836350
8	15	0.9562952016
9	17	0.9659461994
10	19	0.9727226068

Tab. 1: Verhältnisse

Wir erkennen beim regelmäßigen Fünfeck den Goldenen Schnitt (Walser 2013). In diesem Beispiel ist die zweitlängste Diagonale die Fünfeckseite.

4 Kopunktale Geraden

Die drei Geraden $A_i B_{i,0}, i \in \{0,1,2\}$ haben einen gemeinsamen Schnittpunkt S (Abb. 4). Dieser Schnittpunkt liegt auf der Kiepertschen Hyperbel h des Dreieckes $A_0 A_1 A_2$. Dies folgt aus einem Satz von Jacobi (Walser 2012, S. 153-156). Die Kiepertsche Hyperbel ist definiert durch die drei Eckpunkte des Dreiecks, seinen Schwerpunkt und seinen Höhenschnittpunkt. Es ist eine gleichseitige Hyperbel.

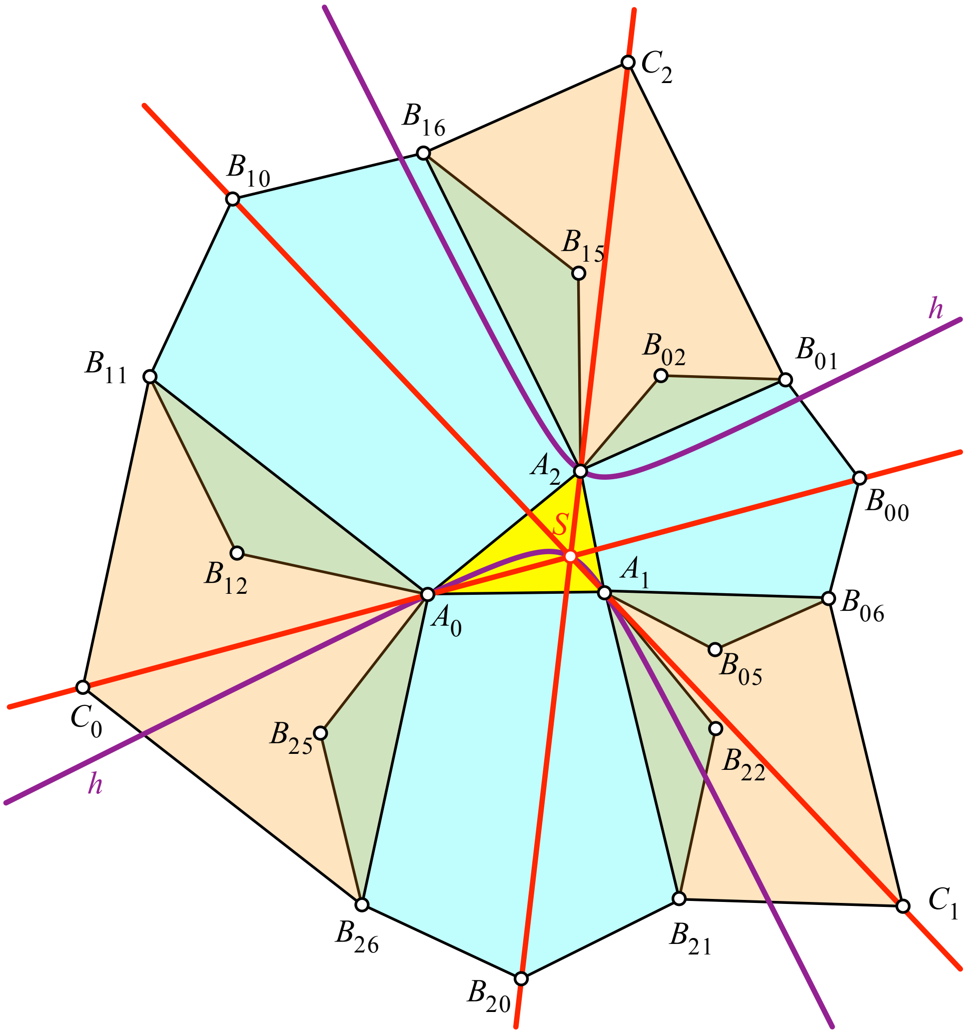

Abb. 4: Gemeinsamer Schnittpunkt

5 Weitere Vermutungen

Es gibt viele weitere Vermutungen im Umfeld unserer Figur. Wir können etwa gemäß Abbildung 5 Parallelogramme einfügen. Die Diagonale D_0A_0 verläuft nun nicht mehr durch den Punkt B_{00}. Die drei Diagonalen D_0A_0, D_1A_1 und D_2A_2 haben aber einen gemeinsamen Schnittpunkt T, und dieser liegt ebenfalls auf der Kiepertschen Hyperbel h (Abb. 5). Numerisch überprüft.

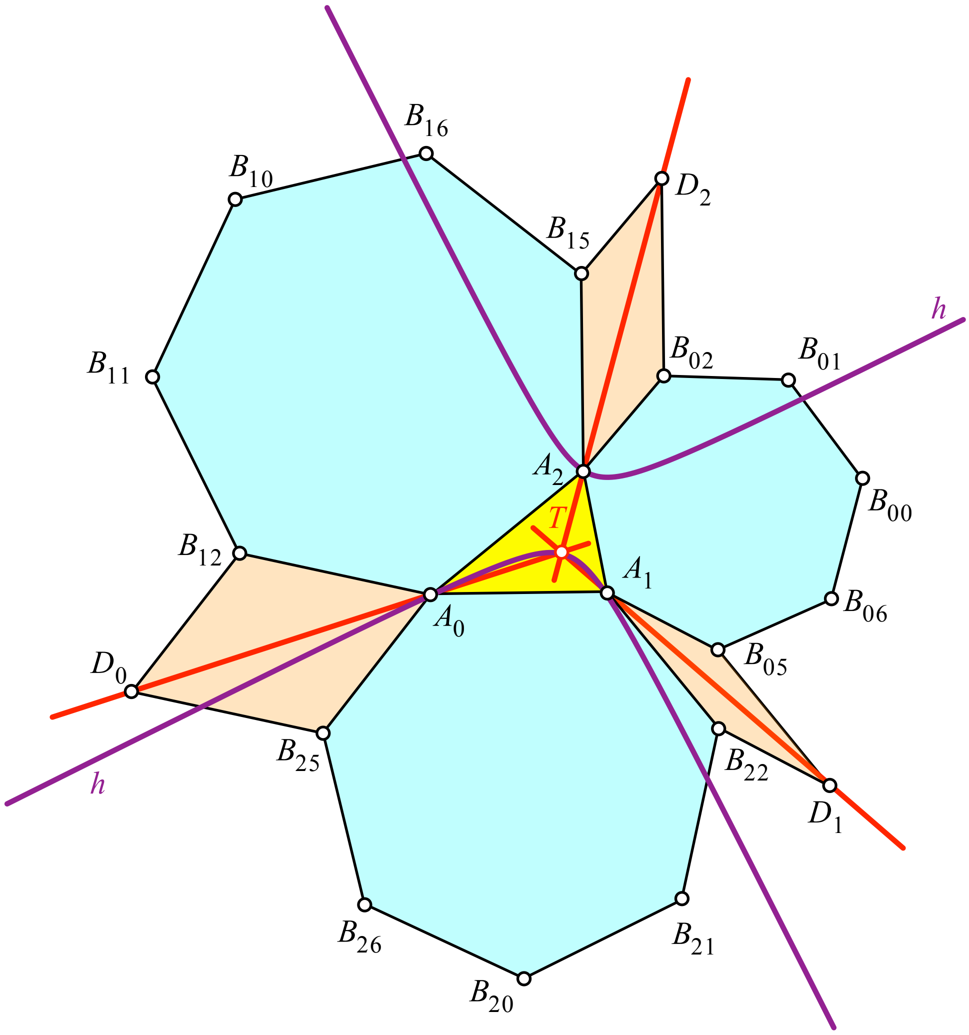

Abb. 5: Andere Parallelogramme

Beispiele dieser Art funktionieren auch mit regelmäßigen Vielecken gerader Eckenzahl (Abb. 6). Numerisch überprüft. Beim Schnittpunkt handelt es sich in diesem speziellen Beispiel um den Fermat-Punkt (Walser 2012, S. 155). Die roten Geraden verlaufen durch die Mittelpunkte der Sechsecke. Sie schneiden sich unter Winkeln von 60°. Die eingezeichneten Diagonalen der Parallelogramme sind alle gleich lang und ebenso lang wie die Strecke von der Dreiecksecke zum Sechseckmittelpunkt.

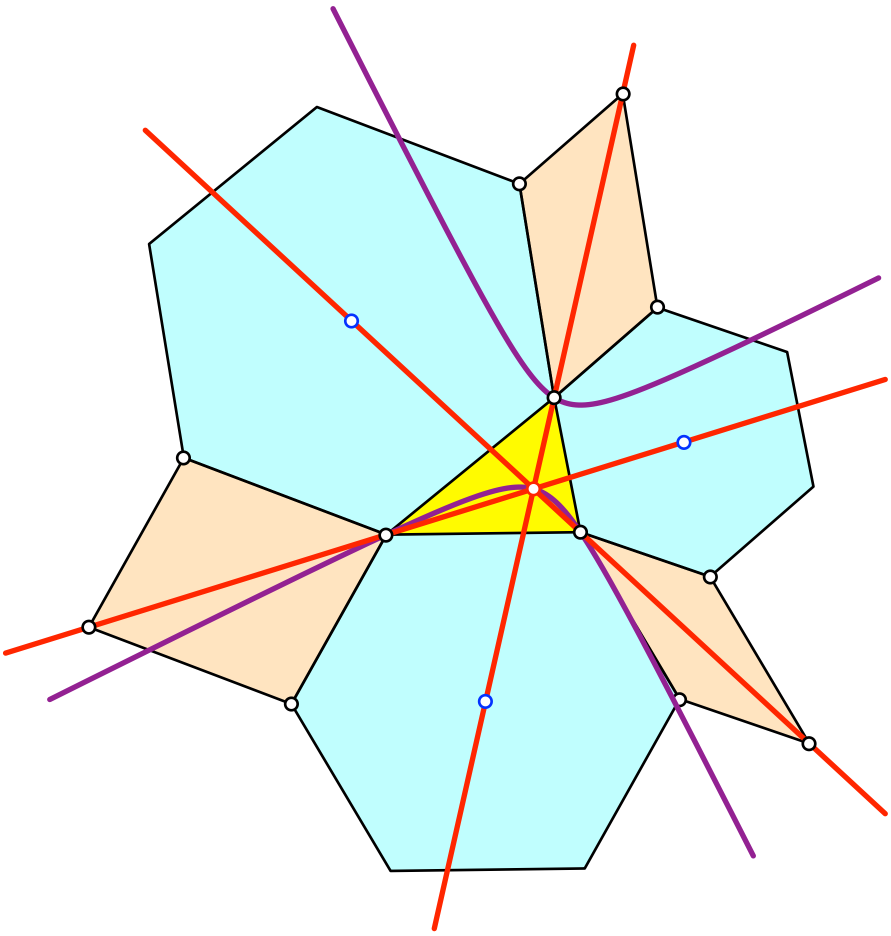

Abb. 6: Gerade Eckenzahl

Literatur

Walser, Hans (2012): *99 Schnittpunkte*. Beispiele – Bilder – Beweise. 2. Auflage. EAGLE, Edition am Gutenbergplatz: Leipzig. ISBN 978-3-937219-95-0

Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Websites

Hans Walser: Schnittpunkte
http://www.walser-h-m.ch/hans/Schnittpunkte/
Hans Walser: Schlussstriche
http://www.walser-h-m.ch/hans/Schlussstriche/