

Hans Walser, [20150928]

Schiefer Pythagoras

1 Worum geht es?

Es wird eine Variation des Satzes des Pythagoras bearbeitet, welche nicht auf das rechtwinklige Dreieck beschränkt ist.

2 Der klassische Satz des Pythagoras

Die Abbildung 1 illustriert den klassischen Satz des Pythagoras.

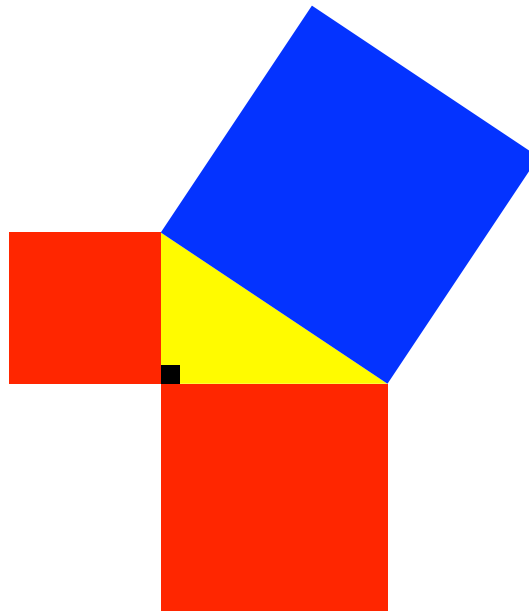


Abb. 1: Blau = rot

Der rechte Winkel des gelben Dreiecks ist wesentlich. Wird der rechte Winkel zum Beispiel durch einen spitzen Winkel ersetzt, verkleinert sich das blaue Quadrat (Abb. 2).

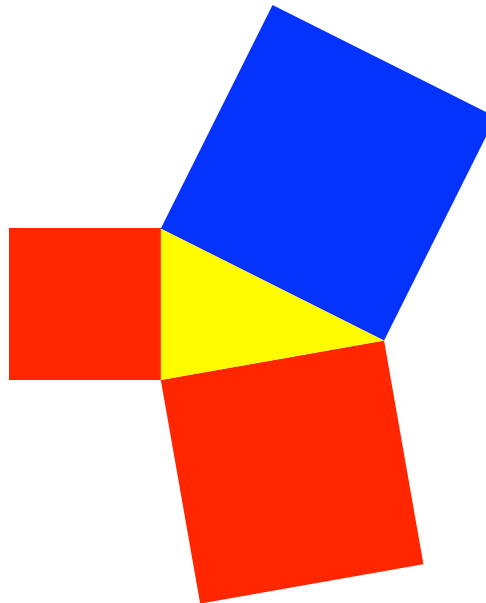


Abb. 2: Blau < rot

3 Der doppelte Pythagoras

3.1 Symmetrische Figur

Wir können die Figur der Abbildung 1 erweitern (Abb. 3). Somit erhalten wir eine achsensymmetrische Figur.

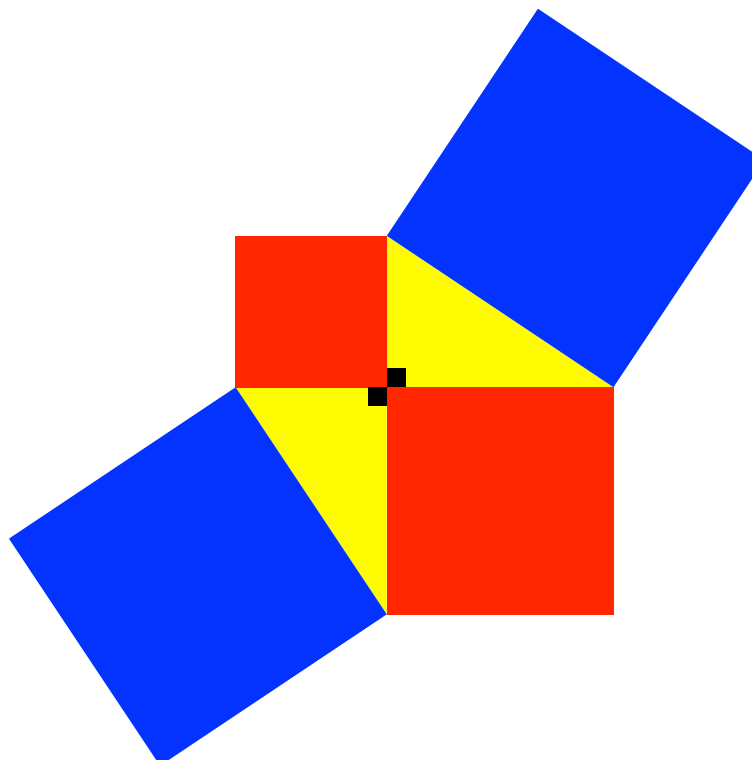


Abb. 3: Blau = 2 mal rot

3.2 Asymmetrische Figur

Wenn wir in der Figur der Abbildung 3 den rechten Winkel verändern, bleibt die Gleichheit erhalten (Abb. 4).

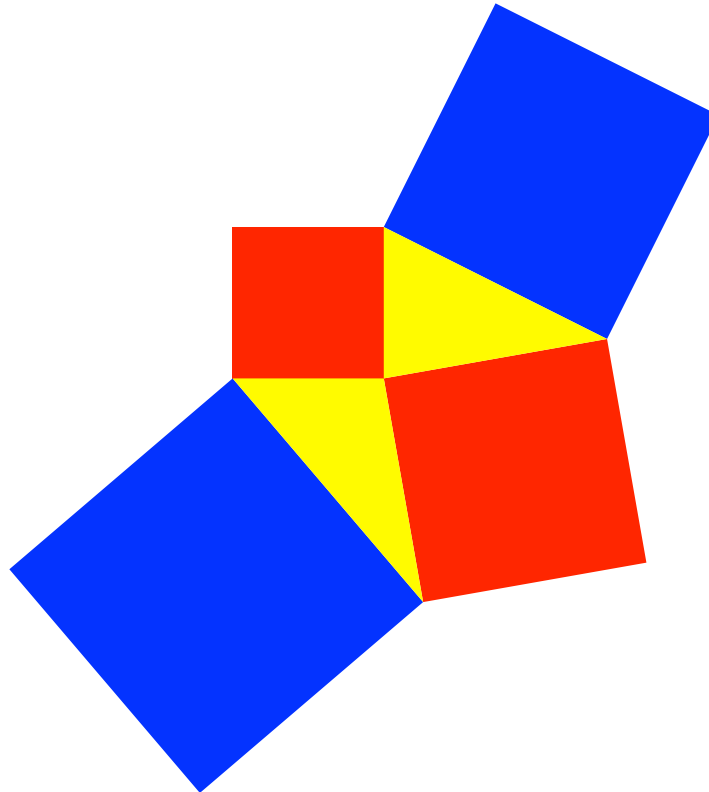


Abb. 4: Blau = 2 mal rot

Das eine blaue Quadrat wird kleiner, das andere aber flächenmäßig um gleich viel größer.

3.3 Iteration

Wir verschieben die beiden blauen Quadrate der Abbildung 4 gemäß Abbildung 5. Dann können wir die ursprünglichen roten Quadrate je viermal ansetzen, auch hier ausschließlich mit Verschiebungen in die Endlage gebracht.

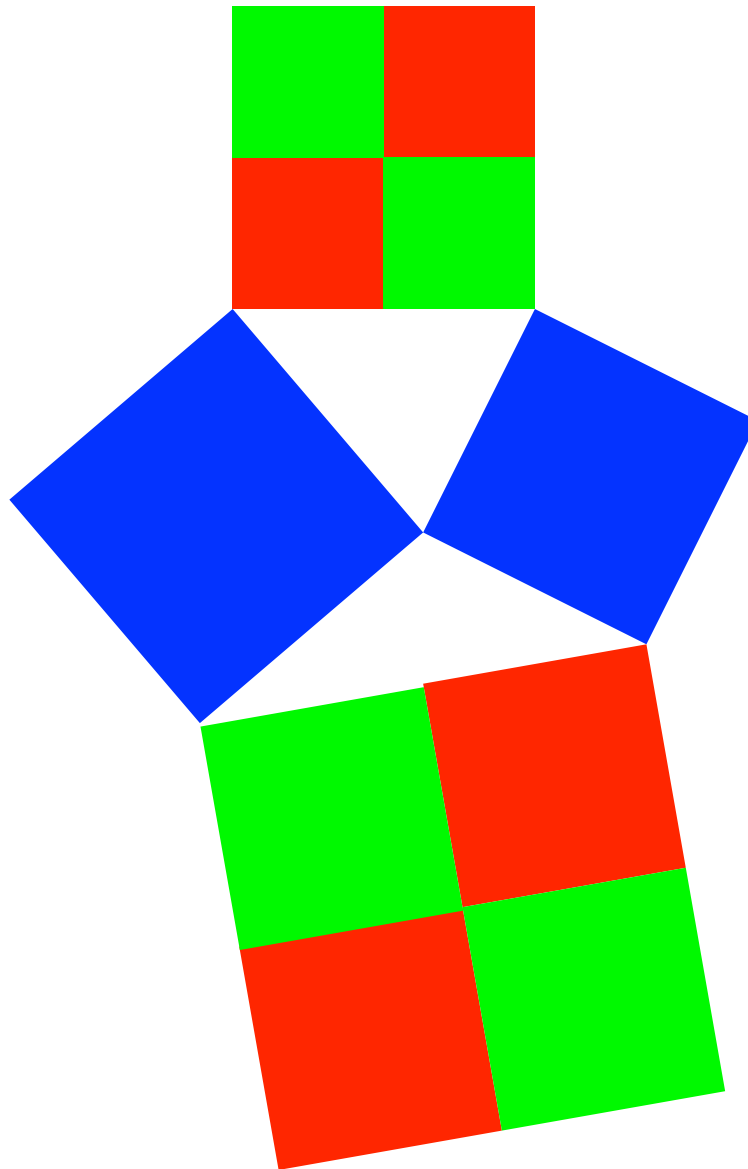


Abb. 5: Iteration

3.4 Beweis für den doppelten Pythagoras

Für den rechnerischen Beweis mit dem Kosinussatz verwenden wir die Bezeichnungen der Abbildung 6.

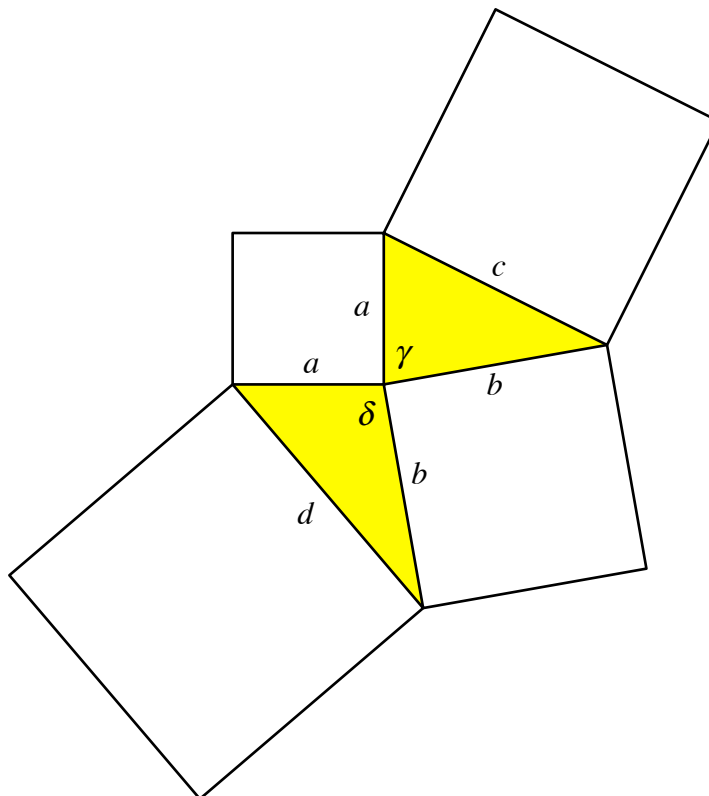


Abb. 6: Bezeichnungen

Nach dem Kosinussatz ist:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \quad (1)$$

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\delta) \quad (2)$$

Wegen $\delta = 180^\circ - \gamma$ sind die beiden Kosinuswerte entgegengesetzt gleich. Addition von (1) und (2) liefert daher:

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2) \quad (3)$$

3.5 Ganzzahliges Beispiel

Wegen

$$d = \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} \quad (4)$$

ist bei gegebenen ganzzahligen Werten für a , b , c der Wert d in der Regel nicht ganzzahlig. Es gibt aber ganzzahlige („pythagoreische“) Lösungen, etwa $a = 9$, $b = 7$, $c = 8$ und $d = 14$. Die Abbildung 7 zeigt die Figur mit einem Zerlegungsbeweis für (3).

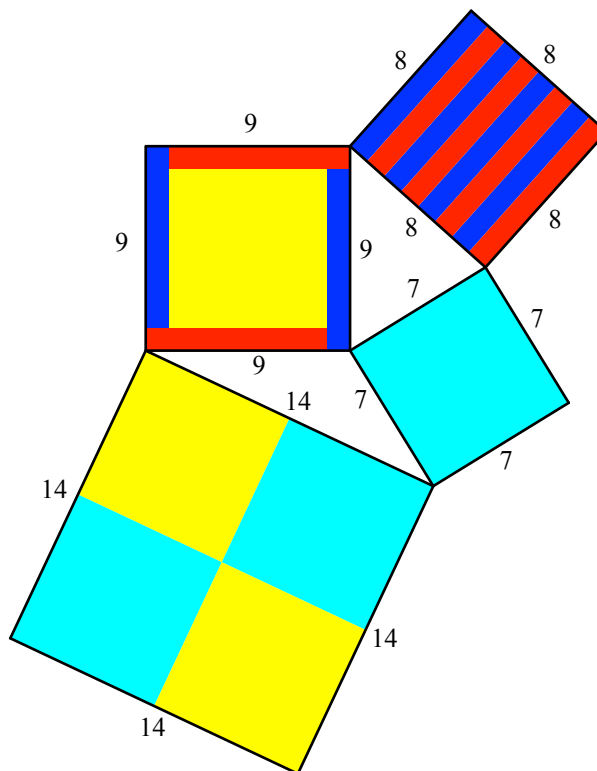


Abb. 7: Ganzzahliges Beispiel

4 Die beiden Dreiecke

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke der Figur der Abbildung 3 sind kongruent.

Die beiden Dreiecke der Figur der Abbildung 4 sind nicht kongruent. Das eine ist spitzwinklig, das andere stumpfwinklig. Trotzdem haben sie Gemeinsamkeiten.

4.1 Flächengleichheit

Die beiden Dreiecke sind flächengleich.

4.1.1 Rechnerischer Beweis

Mit den Bezeichnungen der Abbildung 6 erhalten wir für die beiden Dreiecke die Flächeninhalte:

$$\begin{aligned} A_{\text{Spitzwinkliges Dreieck}} &= \frac{1}{2}ab \sin(\gamma) \\ A_{\text{Stumpfwinkliges Dreieck}} &= \frac{1}{2}ab \sin(\delta) \end{aligned} \quad (5)$$

Wegen $\delta = 180^\circ - \gamma$ sind die beiden Sinuswerte gleich.

4.1.2 Zerlegungsbeweis

Die Abbildung 8 zeigt einen Zerlegungsbeweis.

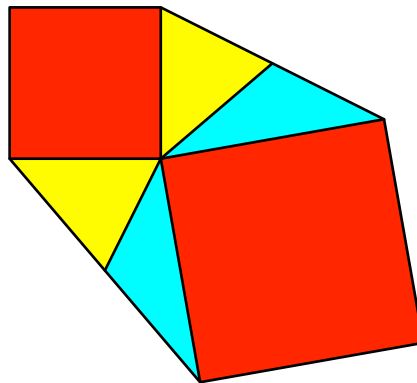


Abb. 8: Zerlegungsbeweis

4.1.3 Ergänzungsbeweis

Wir können die beiden Dreiecke durch Punktspiegelung je zu einem Parallelogramm ergänzen (Abb. 9). Die beiden Parallelogramme sind kongruent und um 90° relativ zueinander verdreht.

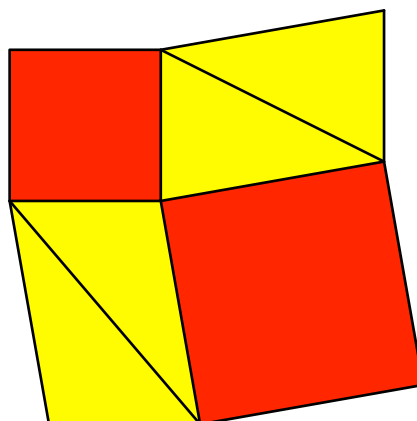


Abb. 9: Ergänzungsbeweis

Die roten Quadrate und die gelben Parallelogramme können zu einer Parkettierung erweitert werden (Abb. 10).

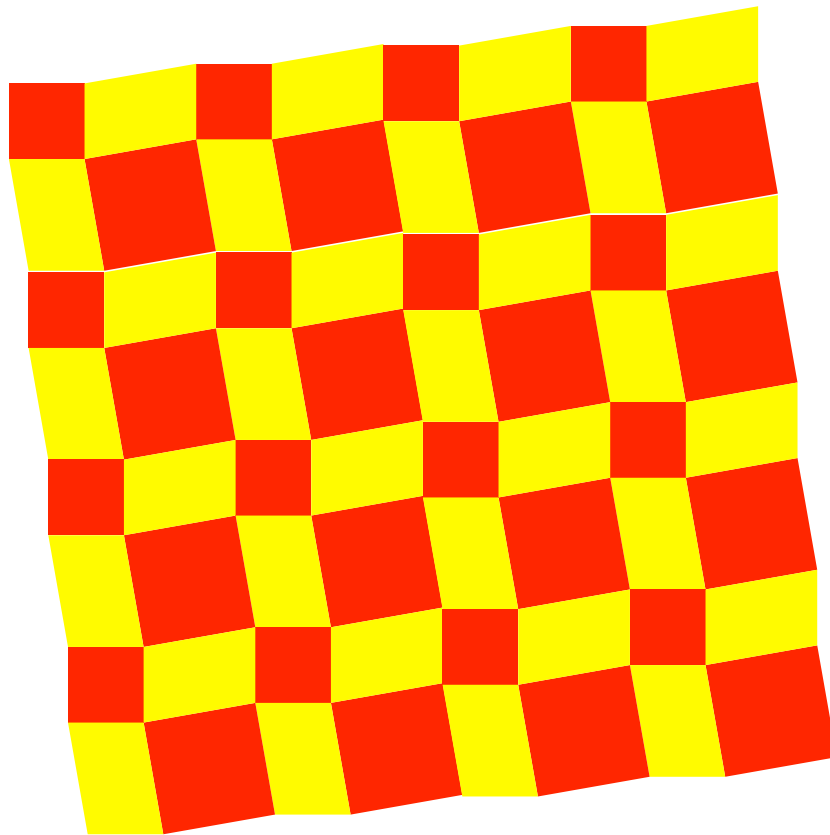


Abb. 10: Parkettierung

4.2 Höhen und Seitenhalbierende

Die beiden gelben Dreiecke haben einen Punkt gemeinsam. Die Höhe des einen Dreiecks durch diesen Punkt liegt auf derselben Geraden wie die Seitenhalbierende des anderen Dreiecks (Abb. 11).

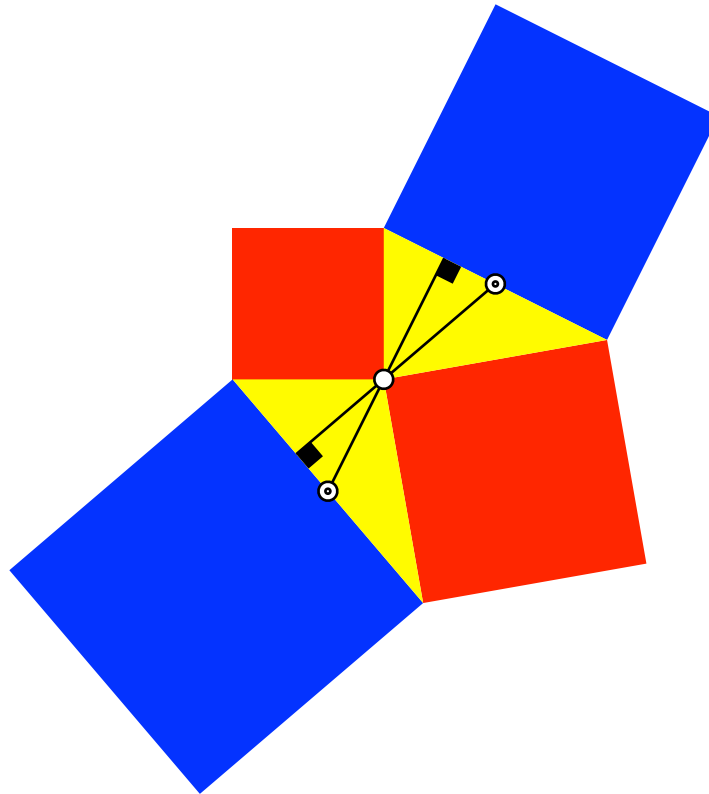


Abb. 11: Höhen und Seitenhalbierende

Der Beweis ergibt sich aus der Ergänzung der Dreiecke zum Parallelogramm gemäß Abbildung 9. Die Parallelogramme sind um 90° verdreht. Wenn wir noch je die zweite Diagonale einzeichnen, wird alles klar (Abb. 12).

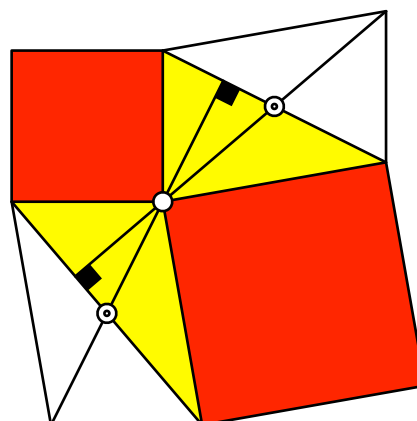


Abb. 12: Beweis

5 Entfernung des Faktors 2

Die Bildlegende der Abbildung 4 und die entsprechende Gleichung (3) enthalten den Faktor 2, der als ästhetische Störung empfunden werden kann.

Wir können ihn loswerden, indem wir die blauen Quadrate halbieren (Abb. 13).

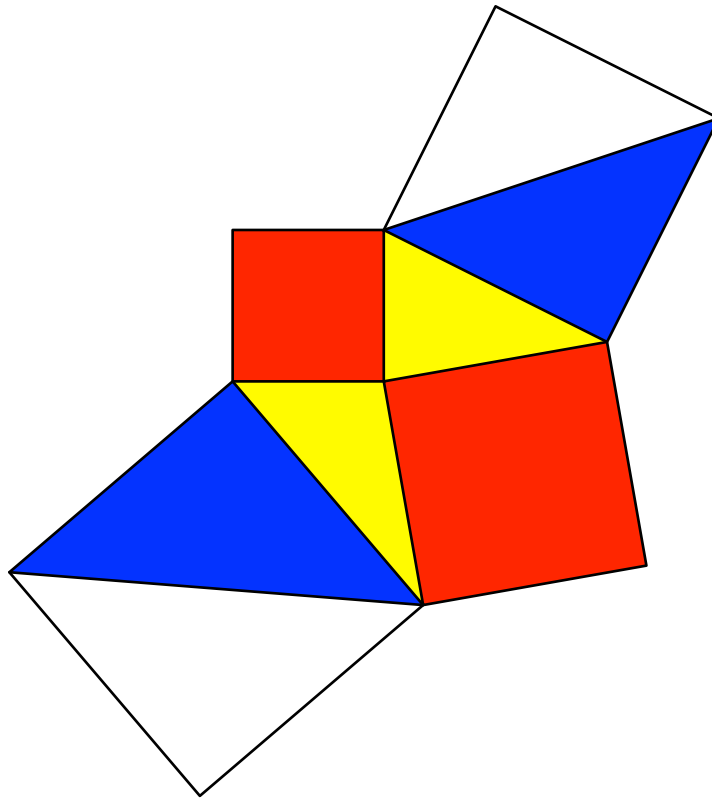


Abb. 13: Blau = rot

Nun sind wir den Faktor 2 los, dafür haben wir einerseits rote Quadrate und andererseits blaue rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke.

Der Autor hat diese Figur als Sangaku in Bonn gesehen. Sie war der Auslöser zu den vorliegenden Überlegungen.

Wir können auch die roten Quadrate halbieren und die blauen Quadrate vierteilen gemäß Abbildung 14. Dann haben wir ausschließlich rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke.

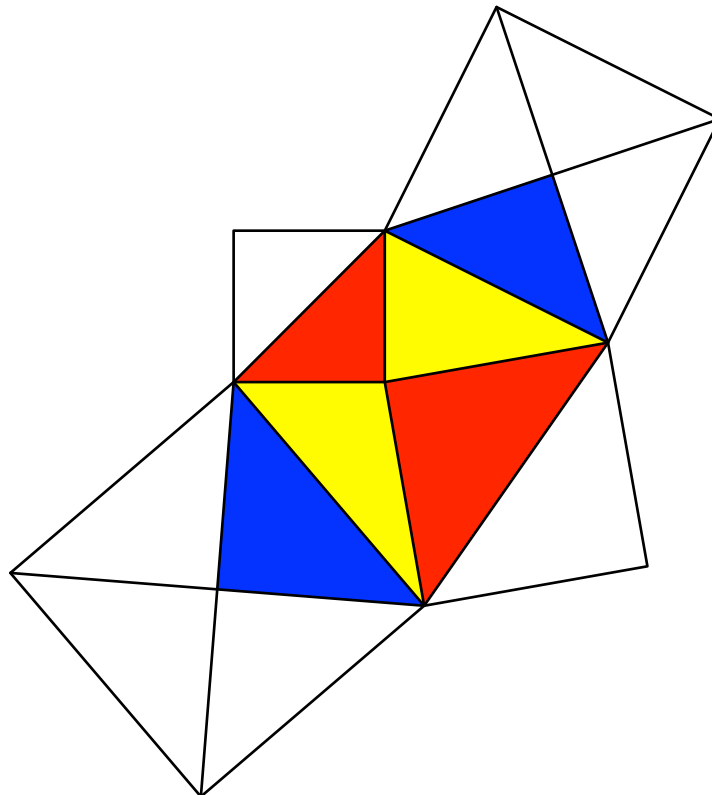


Abb. 14: Blau = rot

6 Schiefer Pythagoras

Die Abbildung 15 zeigt dasselbe wie die Abbildung 14, aber ohne Zusätze.

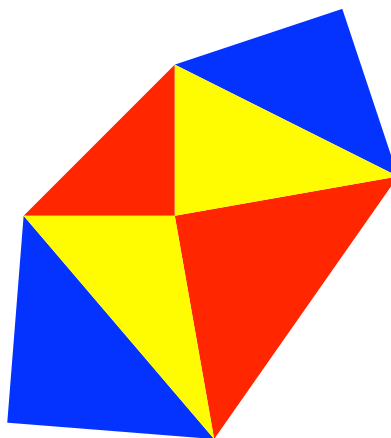


Abb. 15: Blau = rot

Im Folgenden einige Eigenschaften der Figur der Abbildung 15.

6.1 Umkreise

Die Umkreise (Thaleskreise) der vier rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt (Abb. 16).

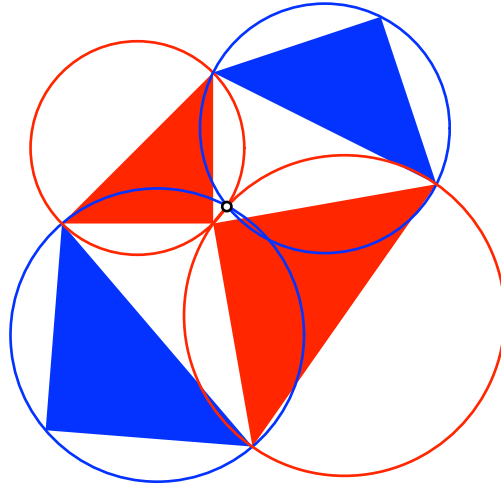


Abb. 16: Umkreise

Den Grund dafür werden wir gleich einsehen.

6.2 Diagonalen

Wir zeichnen zwei Diagonalen („Durchmesserdiagonalen“) gemäß Abbildung 17.

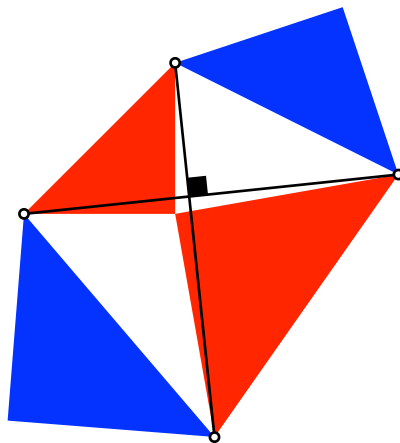
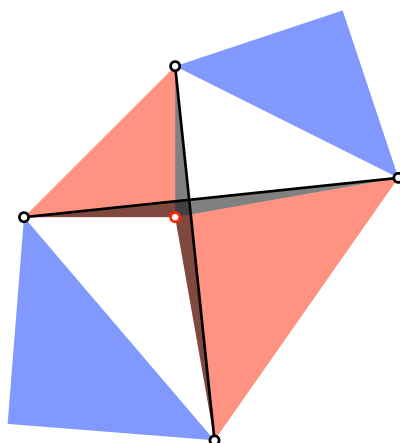


Abb. 17: Diagonalen

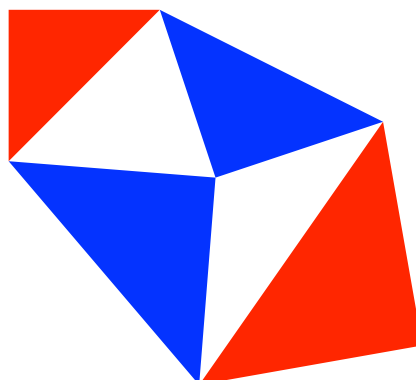
Die beiden Diagonalen sind gleich lang und orthogonal. Für den Beweis verwenden wir die beiden in der Abbildung 18 grau eingezeichneten Dreiecke. Diese gehen durch eine Drehung um 90° um den gemeinsamen Punkt der beiden roten rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke auseinander hervor.

**Abb. 18: Beweisdreiecke**

Damit ist auch die Schnittpunkteigenschaft der vier Umkreise (Abb. 16) bewiesen.

6.3 Inversion

Wir klappen die beiden roten rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke nach außen und dafür die beiden blauen nach innen (Abb. 19).

**Abb. 19: Inversion**

Die beiden blauen Dreiecke haben die Spitze gemeinsam. Für den Beweis zeichnen wir die beiden Thaleskreise über den Basen der blauen Dreiecke (vgl. Abb. 16). Diese Thaleskreise verlaufen durch den Schnittpunkt der beiden orthogonalen Diagonalen gleicher Länge. Sie haben aber noch einen zweiten Schnittpunkt. Die beiden in der Abbildung 20 braun eingezeichneten Dreiecke mit einem gemeinsamen Eckpunkt in diesem zweiten Schnittpunkt sind daher rechtwinklig.

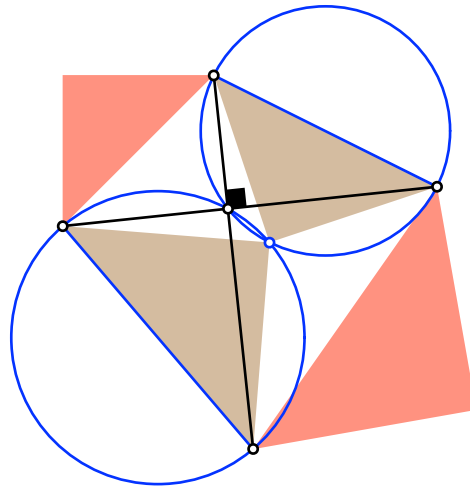


Abb. 20: Zweiter Schnittpunkt der Thaleskreise

Um zu zeigen, dass sie auch rechtwinklig sind, arbeiten wir mit den beiden in der Abbildung 21 eingezeichneten grauen Dreiecken.

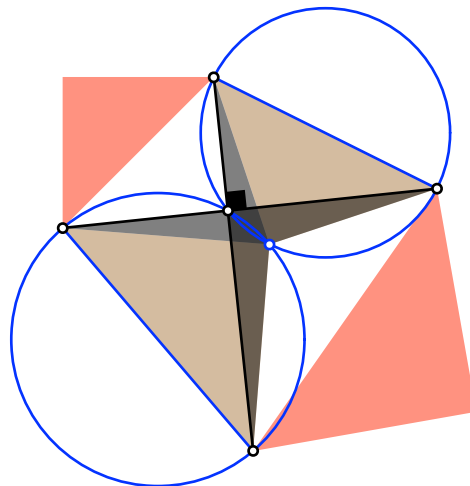


Abb. 21: Die beiden grauen Dreiecke

Entsprechende Seiten dieser beiden grauen Dreiecke stehen je orthogonal zueinander. Die beiden grauen Dreiecke sind also ähnlich. Da sie aber zudem in einer Seite (den gleich langen orthogonalen Diagonalen) übereinstimmen, sind sie sogar kongruent. Daher sind die beiden braunen Dreiecke rechtwinklig gleichschenkelig. Sie stimmen mit den eingeklappten blauen Dreiecken überein.

Die beiden in der Abbildung 22 eingezeichneten grünen Dreiecke sind zunächst untereinander flächengleich. Der Beweis geht analog zur Flächengleichheit der beiden gelben Dreiecke (Abb. 4).

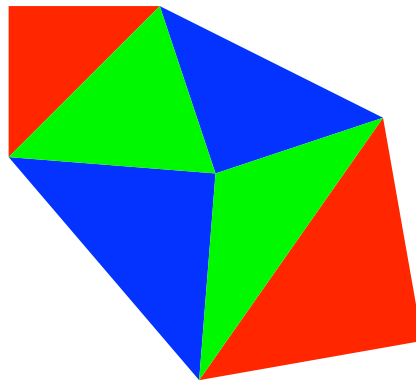


Abb. 22: Flächengleiche grüne Dreiecke

Wegen der Flächengleichheit von rot zu blau und der Invarianz des durch die beiden orthogonalen Diagonalen aufgespannten Viereckes sind die grünen Dreiecke auch flächengleich zu den gelben Dreiecken.

6.4 Noch mehr Diagonalen

In der Figur der Abbildung 23 sind zwei weitere Diagonalen eingezeichnet.

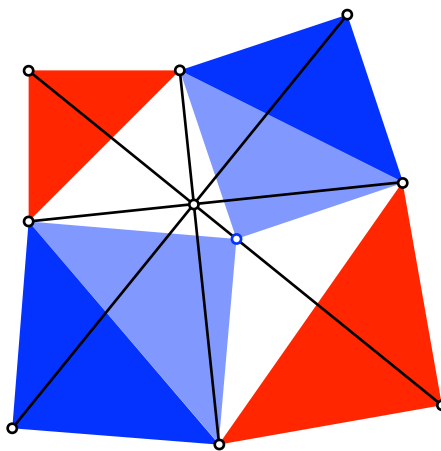
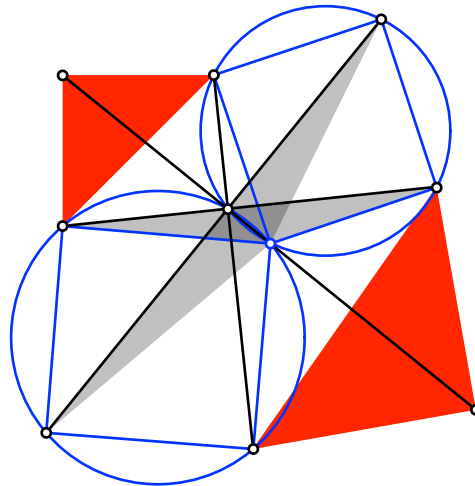


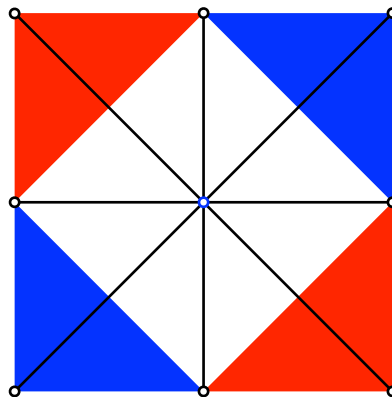
Abb. 23: Zwei weitere Diagonalen

Diese langen Diagonalen verlaufen ebenfalls durch den Schnittpunkt der kurzen Diagonalen, schneiden diese unter Winkeln von 45° und sind $\sqrt{2}$ mal so lang wie die kurzen Diagonalen. Wir zeigen dies exemplarisch für diejenige lange Diagonale, welche die beiden Außenecken der blauen Dreiecke verbindet (Abb. 24).

**Abb. 24: Beweisfigur**

Das kleine graue Dreieck kann auf das große graue Dreieck abgebildet werden mit einer Drehstreckung um den zweiten Schnittpunkt der beiden Thaleskreise. Der Drehwinkel ist 45° , der Streckfaktor $\sqrt{2}$.

Die Abbildung 25 zeigt zum Vergleich ein quadratisches Arrangement mit denselben Winkel- und Längenverhältnissen bei den Diagonalen.

**Abb. 25: Quadratisches Arrangement**

Bei der Abbildung 23 haben wir es mit einem schiefen Quadrat zu tun.

6.5 Parkett

Wir können die Figur der Abbildung 15 zu einem Parkett erweitern (Abb. 26). Die dabei entstehenden neuen Zwischendreiecke sind grün markiert. Die grünen Zwischendreiecke sind flächengleich zu den gelben.

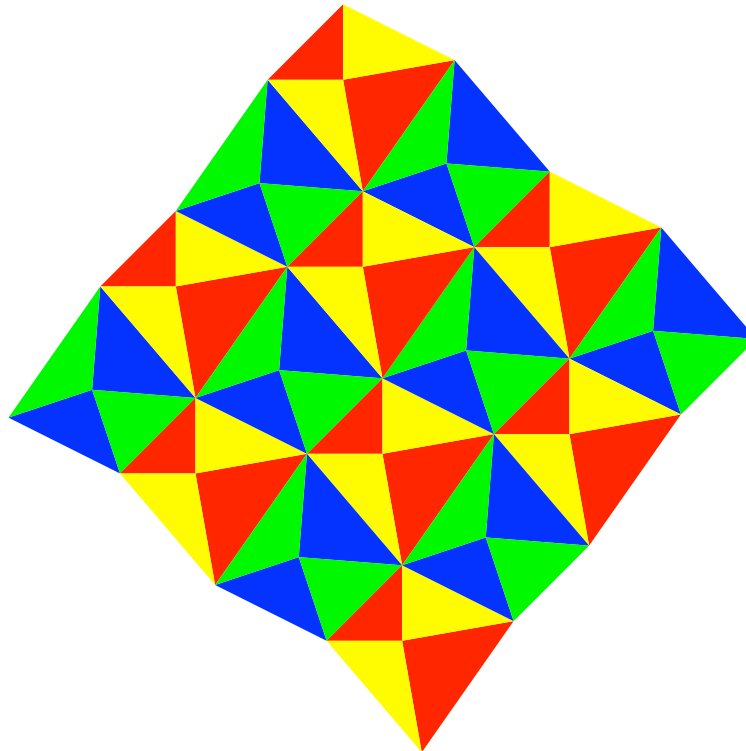


Abb. 26: Parkett

In dieser Parkettierung fallen einerseits rot-gelbe Vierecke auf und andererseits blau-grüne Vierecke an. Die beiden Vierecktypen haben punktsymmetrische Umrisse, aber unterschiedliche Binnenunterteilungen.