Hans Walser, [20210125]

Schlaufenberührung

1 Worum geht es?

Sich berührende Schlaufen bei verlängerten Zykloiden

2 Die Kurven

Wir arbeiten mit Kurven mit der Parameterdarstellung:

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} t - a\sin(t) \\ 1 - a\cos(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2n\pi], \quad n \text{ nach Bedarf} \tag{1}$$

3 Zykloiden

Für $a = 0$ erhalten wir eine horizontale Gerade.

Für $a = 1$ ergibt sich die Zykloide (Abb. 1).

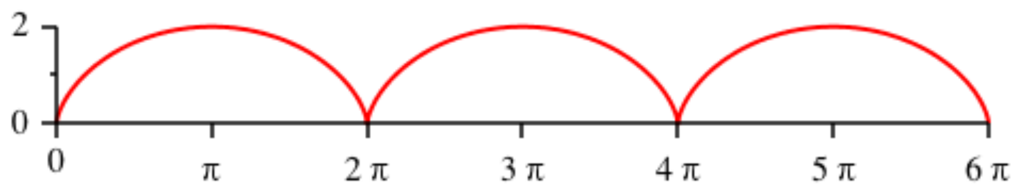

Abb. 1: Zykloide

Für $a > 1$ erhalten wir eine sogenannte verlängerte Zykloide, welche Schlaufen enthält. Die Abbildung 2 zeigt die Kurve für $a = 3$.

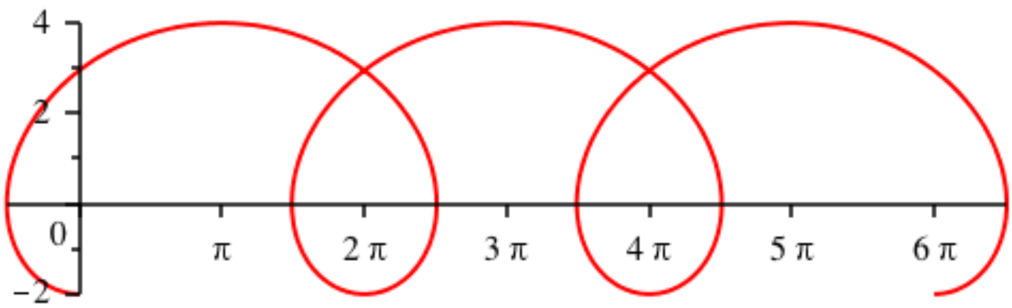

Abb. 2: Verlängerte Zykloide

4 Problemstellung

Für welchen Wert von a berühren sich benachbarte Schlaufen (Abb. 3)?

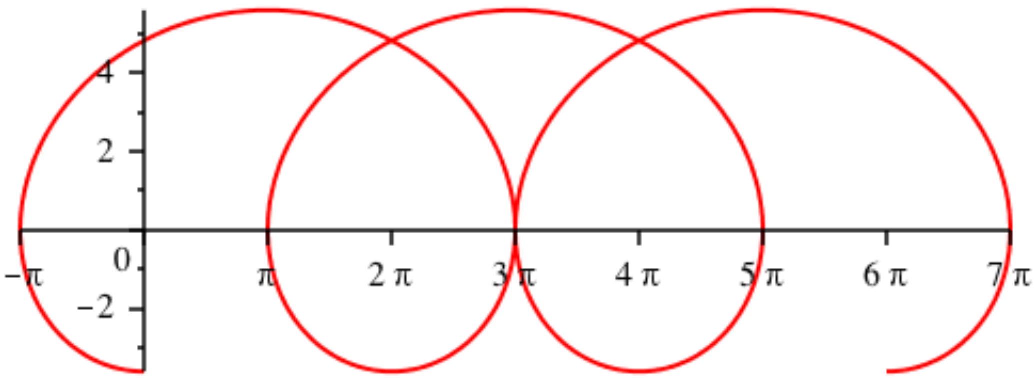

Abb. 3: Berührende Schlaufen

5 Bearbeitung

Aus Symmetriegründen sind in den Berührungspunkten die Kurventangenten senkrecht. Aus (1) gewinnen wir den Tangentialvektor:

$$\dot{\vec{z}}(t) = \begin{bmatrix} 1 - a\cos(t) \\ a\sin(t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Senkrechtstehen heißt, dass die erste Komponente des Tangentialvektors null sein muss, also:

$$1 - a\cos(t) = 0 \tag{3}$$

Ein Vergleich mit (1) zeigt, dass die Berührungspunkte auf der x-Achse liegen.

Wiederum aus Symmetriegründen müssen die Berührungspunkte bei *ungeraden* Vielfachen von π liegen. Somit erhalten wir (zusammen mit (3)) für den ersten Durchgang der Kurve durch die x-Achse die Bedingungen:

$$\begin{aligned} t - a\sin(t) &= -\pi \\ 1 - a\cos(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Dies ist ein transzendentes Gleichungssystem für a und t. Mit numerischen Methoden (fsolve) erhalten wir $a = 4.603338849$ und $t = 1.351816804$.

6 Verallgemeinerung

Für mittelbar benachbarte Schlaufen (Abb. 4) haben wir das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} t - a\sin(t) &= -2\pi \\ 1 - a\cos(t) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Es hat die Lösungen $a = 7.789705768$ und $t = 1.442066530$.

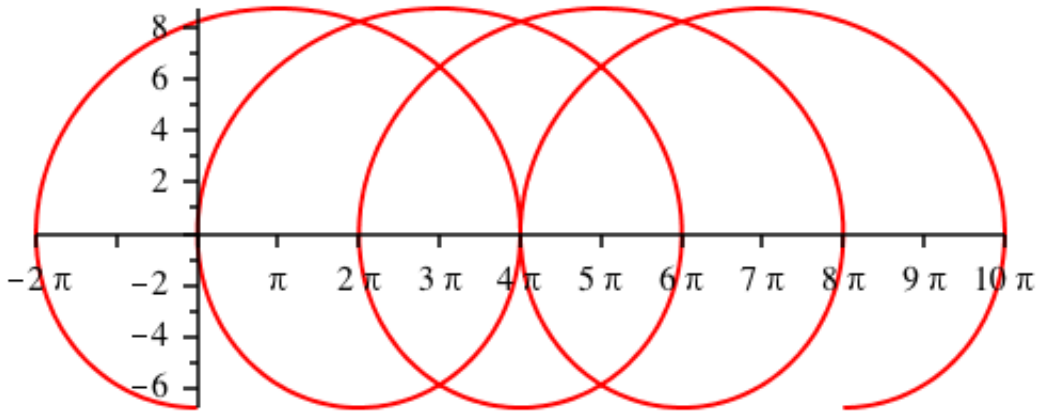

Abb. 4: Mittelbar benachbarte Schlaufen berühren sich

Wir sehen wie der Hase läuft. Im allgemeinen Fall gilt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} t - a\sin(t) &= -k\pi \\ 1 - a\cos(t) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Die Tabelle 1 gibt die ersten Lösungen.

Dabei sind auch noch die Bogenlängen, bezogen auf ein Parameterintervall für t der Länge 2π eingetragen. Bei der Zykloide gibt es eine „schöne“ Zahl, nachher nicht mehr.

k	a	t	Bogenlänge
0	1	0	8
1	4.603338849	1.351816804	29.26587933
2	7.789705768	1.442066530	49.14602367
3	10.94987987	1.479343699	68.94365255
4	14.10169534	1.499823299	88.71499063
5	17.24976557	1.512792004	108.4745546

Tab. 1: Einige Lösungen

Nachfolgend die zugehörigen Kurven.

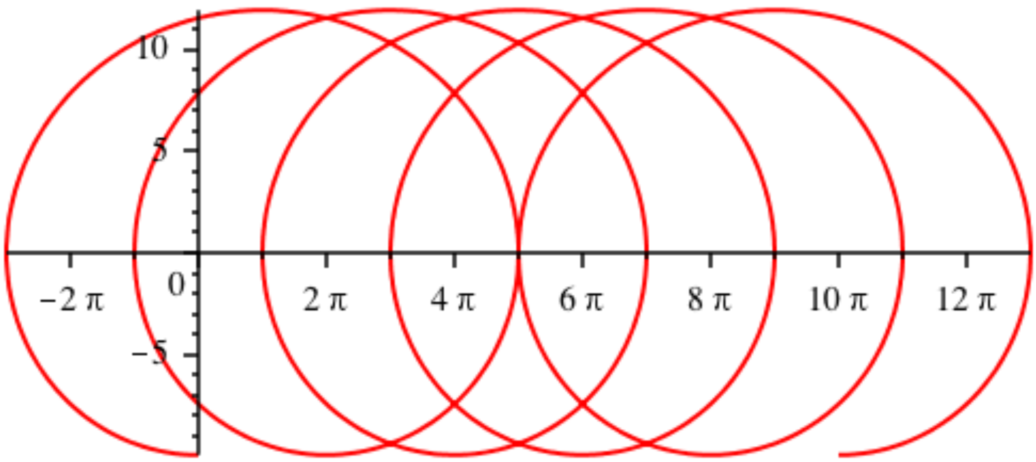

Abb. 5.1: *k* = 3

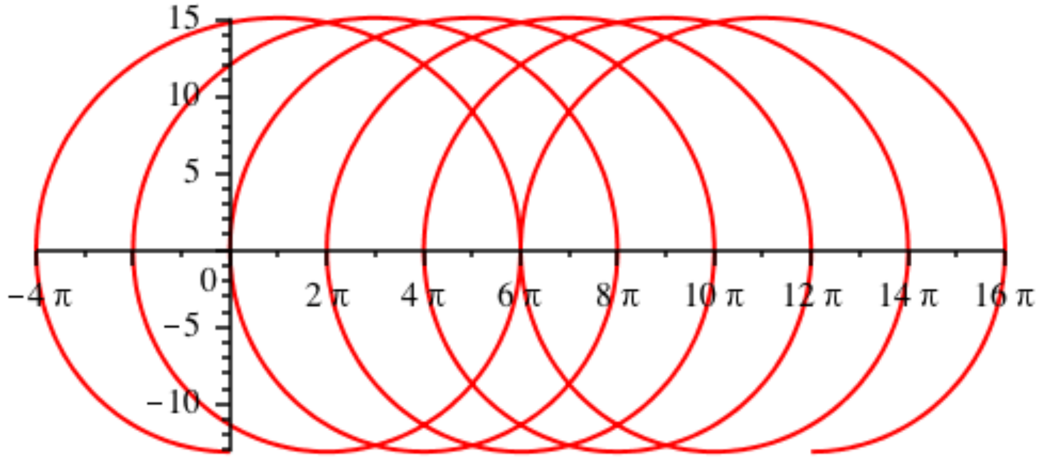

Abb. 5.2: *k* = 4

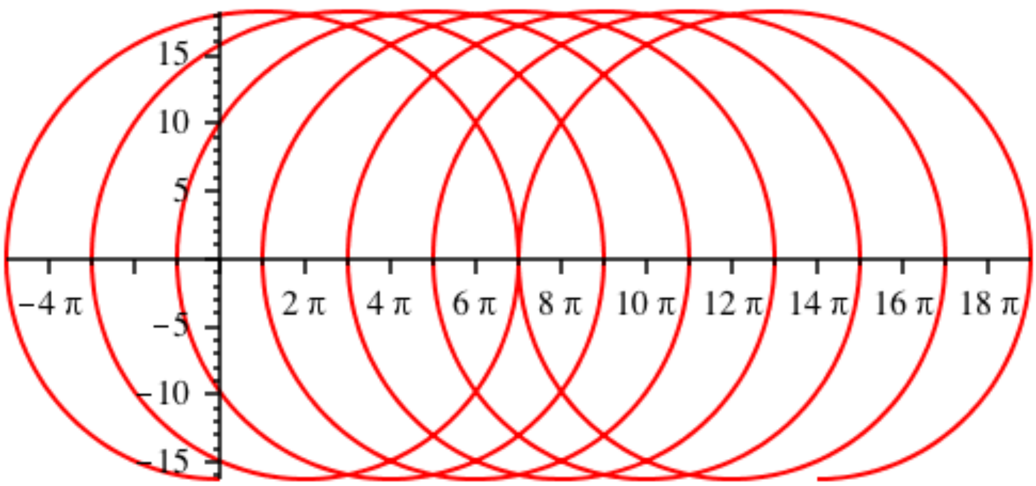

Abb. 5.3: *k* = 5