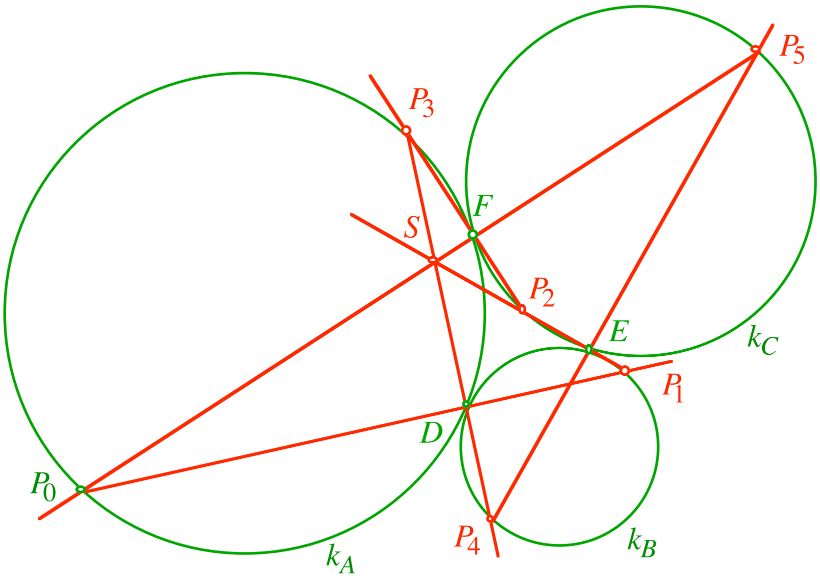
Hans Walser, [20061210d]

Eine Schließungsfigur mit Schnittpunkt

1 Die Figur

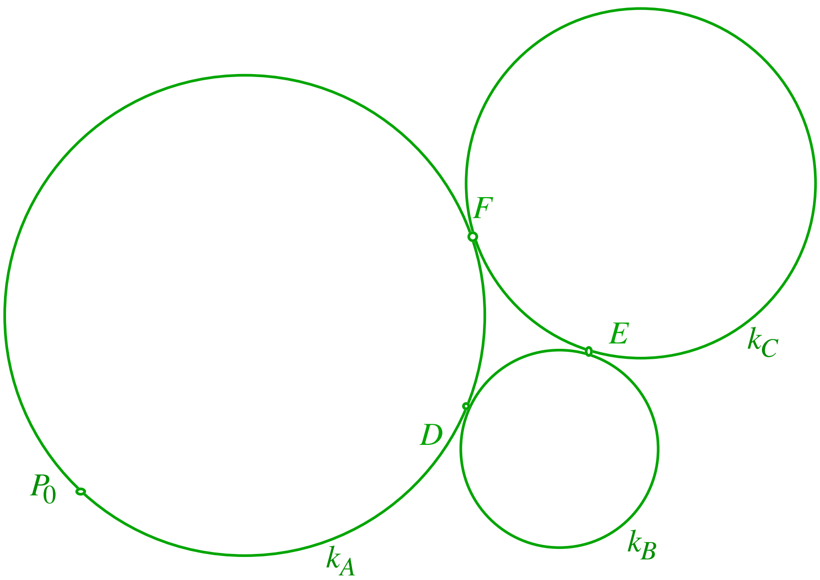
Auf die folgende Figur bin ich gestoßen, indem ich bei drei paarweise sich berührenden Kreisen von einem Kreispunkt über den Berührungspunkt zu einem Nachbarkreis gegangen bin.



Die Figur

2 Disposition

Wir beginnen mit drei Kreisen k_A, k_B, k_C, welche sich paarweise in D, E, F berühren. Ferner wählen wir einen beliebigen Punkt $P_0 \in k_A$.



Ausgangslage

Nun konstruieren wir Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ wie folgt.

$$P_1 = P_0 D \cap k_B$$
$$P_2 = P_1 E \cap k_C$$
$$P_3 = P_2 F \cap k_A$$
$$P_4 = P_3 D \cap k_B$$
$$P_5 = P_4 E \cap k_C$$
$$P_6 = P_5 F \cap k_A$$

3 Vermutungen

Aus der Figur lesen wir folgende Vermutungen ab:

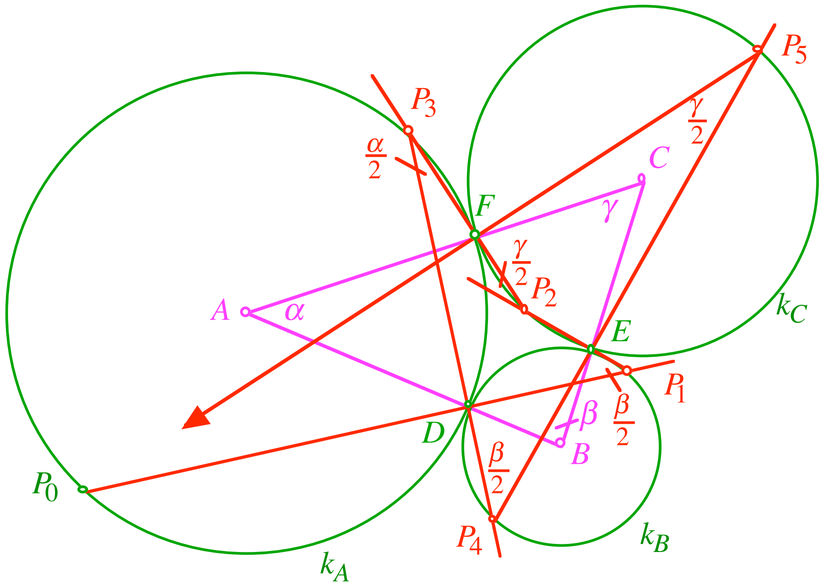
a) $P_6 = P_0$, wir haben eine so genannte Schließungsfigur.

b) $P_0 D \perp P_3 D, \quad P_1 E \perp P_4 E, \quad P_2 F \perp P_5 F$ (Orthogonalität)

c) $P_1 P_2, P_3 P_4, P_5 P_0$ sind kopunktal, den gemeinsamen Schnittpunkt nennen wir S. Ebenso sind $P_0 P_1, P_2 P_3, P_4 P_5$ kopunktal (in der Figur nicht eingezeichnet).

4 Beweise

Die Zentren A, B, C der drei Kreise k_A, k_B, k_C bilden ein Dreieck, dessen Seiten durch D, E, F verlaufen. Aus Peripheriewinkelsätzen ergeben sich die eingezeichneten Winkel.



Winkel

4.1 Beweis der Schließungseigenschaft

Es sei $Q = P_5 F \cap P_0 P_1$. Wir haben zu zeigen, dass $Q \in k_A$.

Zunächst ergeben sich folgende Winkel:

Punkt	Q	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Winkel	ϑ	$\frac{\beta}{2}$	$\pi + \frac{\gamma}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\beta}{2}$	$\frac{\gamma}{2}$

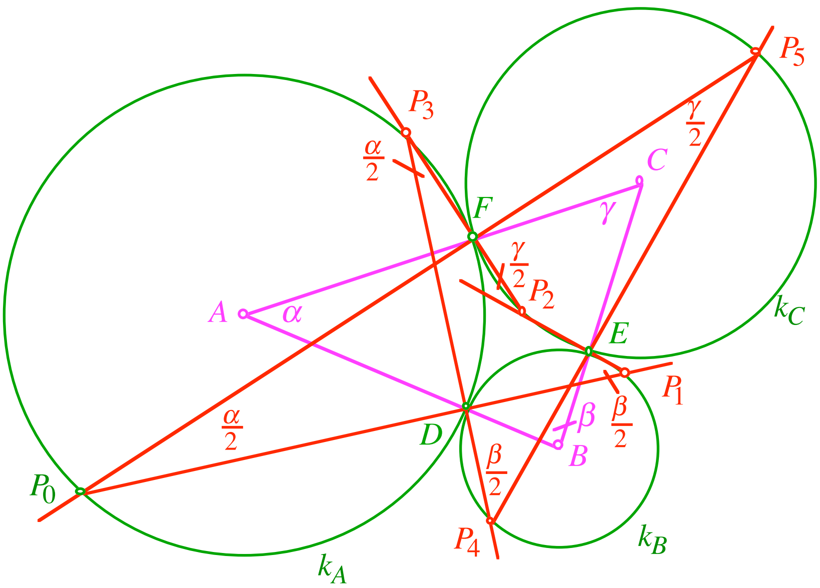
Den Winkel ϑ bei Q können wir über die Winkelsumme des Sechseckes $QP_1P_2P_3P_4P_5$ berechnen. Nun aber Vorsicht: dieses Sechseck ist selbstüberkreuzend. Es hat die Umlaufszahl 2, daher ist die Summe der Außenwinkel $= 2 \cdot 2\pi = 4\pi$. Zusammen mit der Innenwinkelsumme $\sum\limits_{i=1}^{6} \phi_i$ muss das 6π ergeben, nämlich π pro Eckpunkt. Somit ist in unserem Fall: $\sum\limits_{i=1}^{6} \phi_i = 2\pi$. In unserem Fall heißt das:

$$\vartheta + \frac{\beta}{2} + \left(\pi + \frac{\gamma}{2}\right) + \underbrace{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}_{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

$$\vartheta + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\vartheta = \frac{\alpha}{2}$$

Der Punkt Q liegt somit auf dem Ortsbogen k_A. Damit ist die Schließungseigenschaft bewiesen. Wir dürfen also mit folgender Figur weiterarbeiten:



Schließungsfigur und Winkel

4.2 Beweis der Orthogonalität

Wir zeigen exemplarisch $P_0D \perp P_3D$. Im Viereck $DP_1P_2P_3$ haben wir die Innenwinkelsumme:

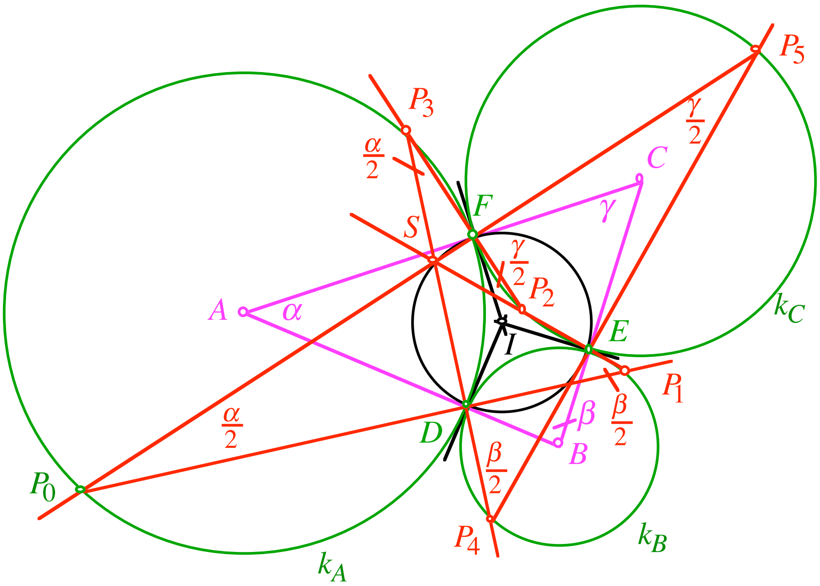
$$\delta + \frac{\beta}{2} + \left(\pi + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} = 2\pi$$

$$\delta + \underbrace{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}_{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

4.3 Beweis der Schnittpunktseigenschaft

Für den Beweis der Schnittpunktseigenschaft benötigen wir den Inkreis des Dreieckes ABC. Dieser berührt die Dreiecksseiten in den Punkten D, E, F (Überlegung: gleich lange Tangentenabschnitte). Sein Mittelpunkt sei I.



Figur mit Inkreis

Wir zeigen, dass der vermutete Schnittpunkt S existiert und auf dem Inkreis liegt.

Es sei zunächst $S' = P_1P_2 \cap P_3P_4$. Das rechtwinklige Dreieck $P_1S'D$ hat bei S' den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$. Nun ist aber $\sphericalangle DIE = \pi - \beta$, der obere Inkreisbogen ED ist also Ortsbogen für den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$. Daher liegt S' auf dem Inkreis.

Weiter sei $S'' = P_1P_2 \cap P_5P_0$. Das rechtwinklige Dreieck $P_5S''E$ hat bei S'' den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Nun ist aber $\sphericalangle EIF = \pi - \gamma$, der linke Inkreisbogen FE ist also Ortsbogen für den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Daher liegt S'' ebenfalls auf dem Inkreis.

Damit ist die Schnittpunktseigenschaft beweisen.

Bemerkung: Den zweiten Schnittpunkt, als den gemeinsamen Punkt von P_0P_1, P_2P_3, P_4P_5, erhalten wir, indem wir S am Inkreismittelpunkt I spiegeln. Der Beweis sei der Leserin überlassen. Der Thaleskreis lässt schön grüßen.