

Hans Walser, [20161003]

Schlussgerade

1 Worum geht es?

Es wird ein Beispiel von kollinearen Punkten vorgestellt.

2 Konstruktion

Auf einem Kreis k wählen wir drei Punkte M_1, M_2, M_3 und einen Punkt P (Abb. 1).

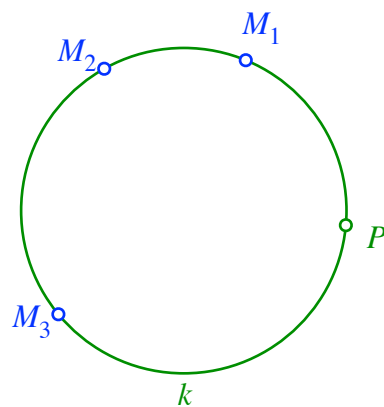


Abb. 1: Punkte auf einem Kreis

Weiter zeichnen wir drei Kreise k_i mit Mittelpunkt M_i durch P (Abb. 2).

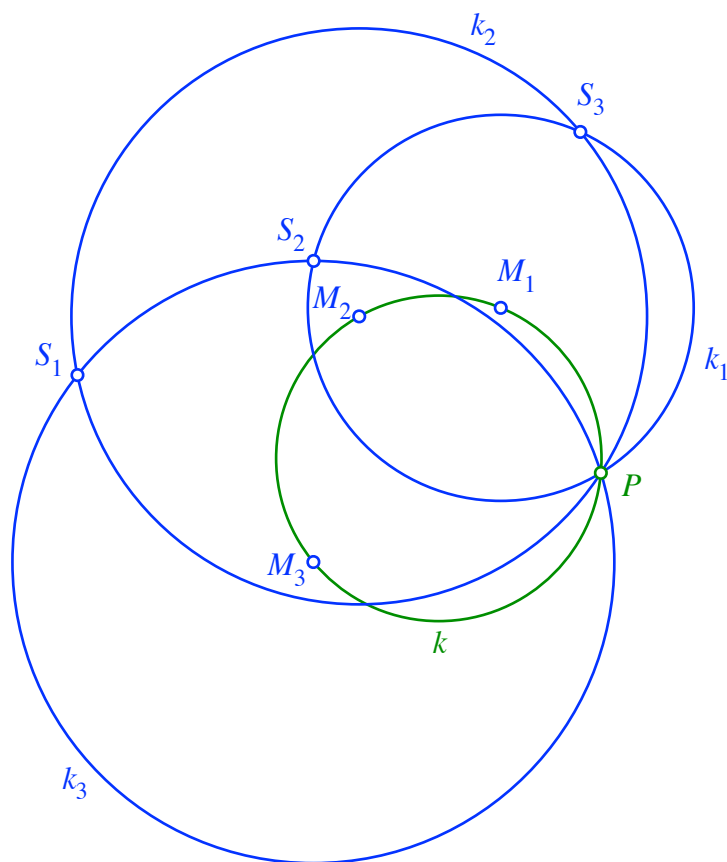


Abb. 2: Drei Kreise

Dann sind die drei von P verschiedenen paarweisen Schnittpunkte der drei Kreise kollinear (Abb. 3).

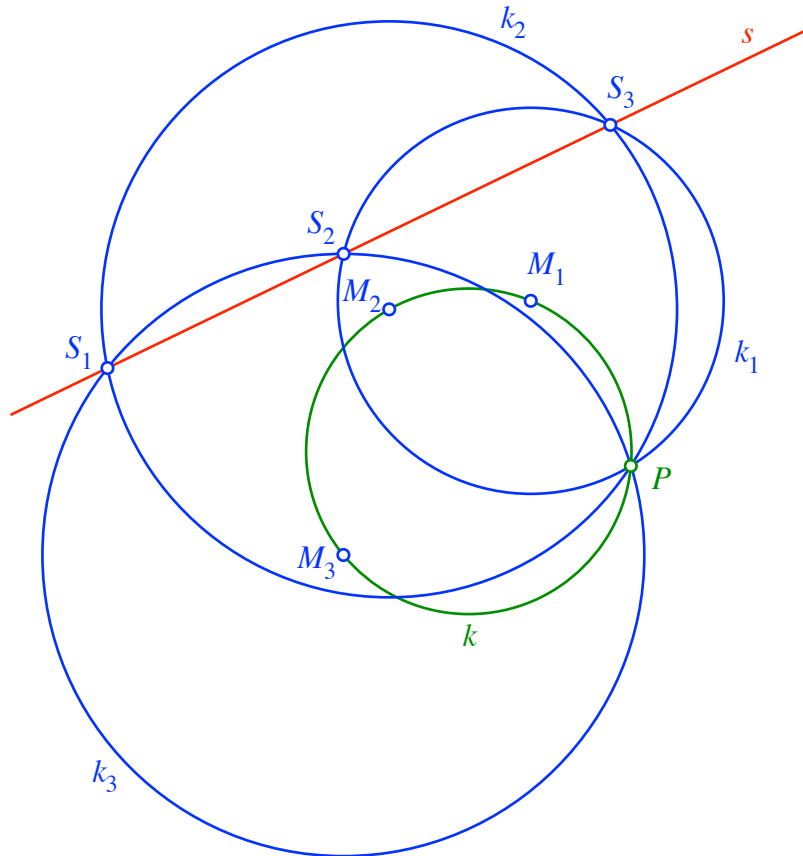


Abb. 3: Kollineare Punkte

3 Beweis

Wir zeichnen zum Dreieck $M_1M_2M_3$ die Wallace-Gerade w (früher als Simson-Gerade bezeichnet) bezüglich P (Abb. 4).

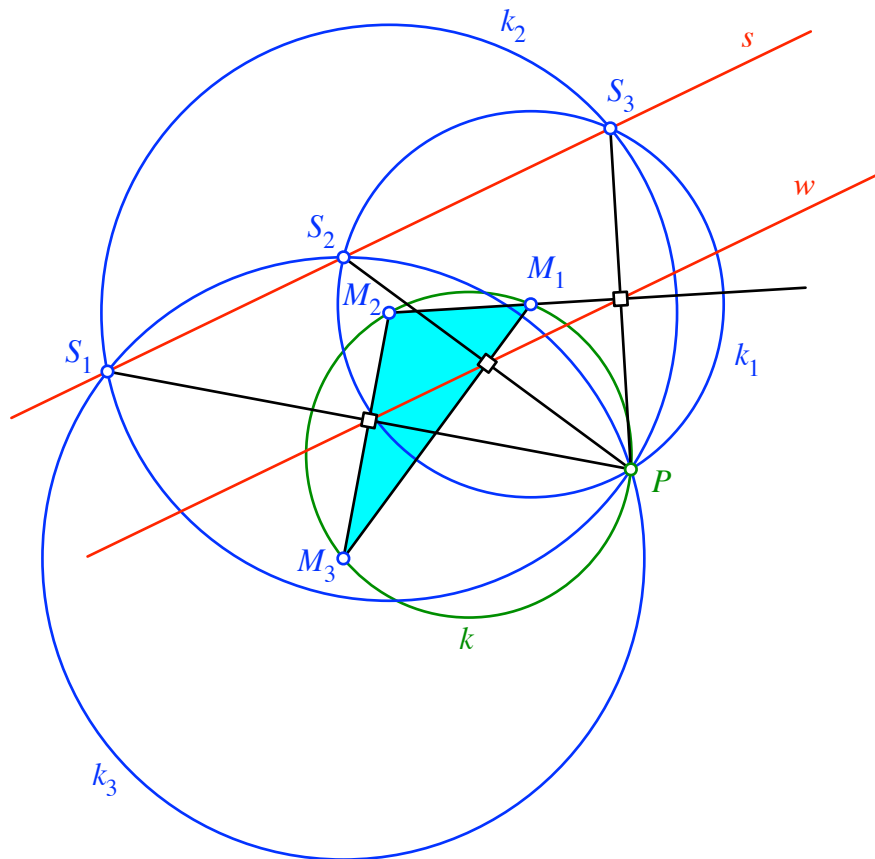


Abb. 4: Wallace-Gerade

Streckung von w von P mit dem Faktor 2 ergibt die Gerade s , auf welcher die drei Schnittpunkte liegen.

4 Umkehrung

Die Wallace-Gerade ist eine genau-dann-Aussage. Auf unseren Fall übertragen heißt das folgendes.

Wir beginnen mit drei kollinearen Punkten und einem Punkt Q außerhalb der Trägergeraden der drei kollinearen Punkte. Nun zeichnen wir die drei Kreise durch Q und je zwei der drei kollinearen Punkte.

Dann liegen die drei Mittelpunkte der Kreise und Q auf einem Kreis.

5 Vier Kreise

Nun eine Mehrfachanwendung unserer Überlegungen. Auf einem Kreis k wählen wir vier Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 und einen Punkt P (Abb. 5). Weiter zeichnen wir vier Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 durch P . Von diesen vier Kreisen können wir auf vier Arten deren drei auswählen. Die jeweils zweiten paarweisen Schnittpunkte jeder der vier Dreierauswahlen sind kollinear. Wir erhalten also vier Geraden.

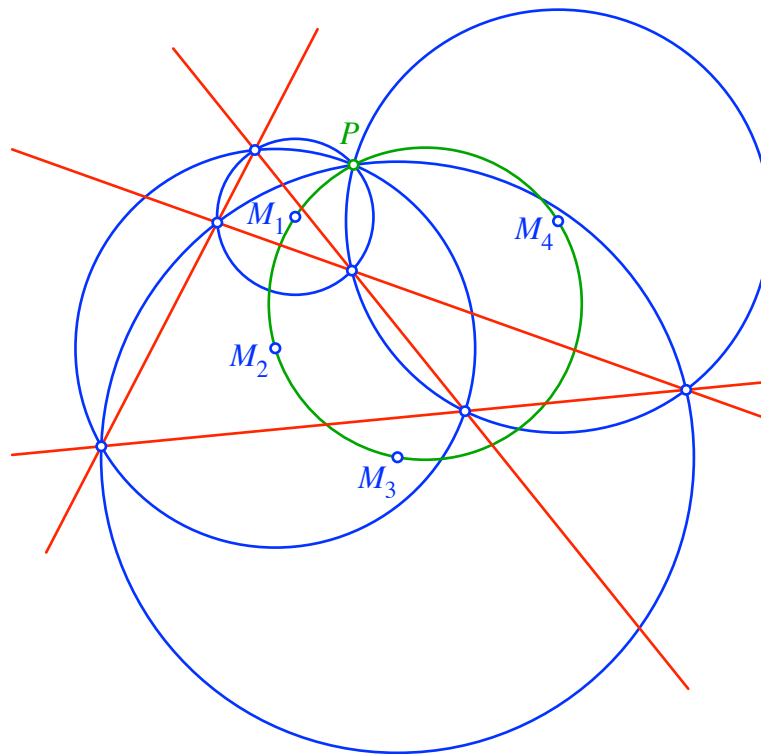


Abb. 5: Vier blaue Kreise

Nun zur Umkehrung. Wir wählen vier Geraden in allgemeiner Lage. Je drei davon bilden ein Dreieck. Das ist auf vier Arten möglich, und in jedem der vier Arten zeichnen wir den Umkreis des Dreiecks. Dann kann man mit Kreiswinkelsätzen zeigen ([Walser: Vierkreisepunkt](#)), dass die vier Umkreise einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Wir lassen nun diesen Schnittpunkt die Rolle unseres Punktes P spielen und folgern daraus, dass die Mittelpunkte der Umkreise zusammen mit dem Schnittpunkt auf einem Kreis liegen.

Websites

Hans Walser: Vierkreisepunkt (01.10.2016):

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/V/Vierkreisepunkt/Vierkreisepunkt.htm>