Hans Walser, [20100417a]

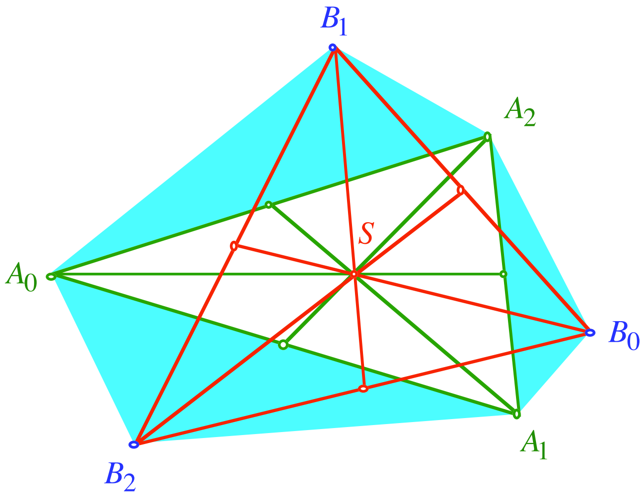
Schwerpunkt beim Dreieck

Zwei Eigenschaften im Zusammenhang mit dem Schwerpunkt des Dreieckes.

1 Aufsetzen ähnlicher Dreiecke

1.1 Allgemeiner Fall

Einem beliebigen Dreieck $A_0A_1A_2$ setzen wir auf den Seiten drei zueinander ähnliche Dreiecke $A_0A_1B_2$, $A_0B_1A_2$ und $B_0A_1A_2$ an. Die Dreiecke dürfen nach außen oder nach innen angesetzt werden.



Ansetzen ähnlicher Dreiecke

Dann haben die beiden Dreiecke $A_0A_1A_2$ und $B_0B_1B_2$ denselben Schwerpunkt S.

Beweis

Wir interpretieren die Punkte als komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene. Zunächst ist dann:

$$S = \tfrac{1}{3}\left(A_0 + A_1 + A_2\right)$$

Weiter gilt wegen der Ähnlichkeit der angesetzten Dreiecke:

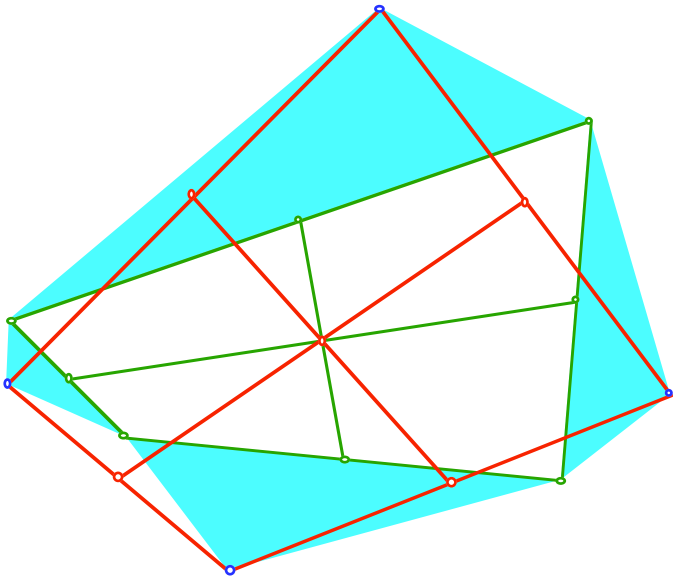
$$\left.\begin{aligned} B_0 &= A_1 + \lambda\left(A_2 - A_1\right) \\ B_1 &= A_2 + \lambda\left(A_0 - A_2\right) \\ B_2 &= A_0 + \lambda\left(A_1 - A_0\right) \end{aligned}\right\} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Für den Schwerpunkt T des Dreieckes $B_0B_1B_2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{3}\left(B_0 + B_1 + B_2\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\Big(\left(A_1 + \lambda\left(A_2 - A_1\right)\right) + \left(A_2 + \lambda\left(A_0 - A_2\right)\right) + \left(A_0 + \lambda\left(A_1 - A_0\right)\right)\Big) \\ &= \tfrac{1}{3}\left(A_0 + A_1 + A_2\right) \\ &= S \end{aligned}$$

1.2 Verallgemeinerung

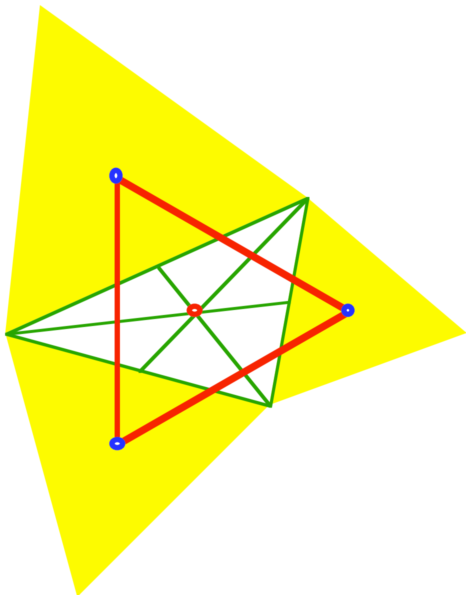
Der Sachverhalte und die Beweisführung lassen sich auf ein beliebiges n-Eck $A_0 \ldots A_n$ und seinen Eckenschwerpunkt S verallgemeinern.



Situation im Viereck

1.3 Sonderfall: Napoleon-Barlotti

Wir setzen einem beliebigen Dreieck $A_0A_1A_2$ gleichseitige Dreiecke auf und bezeichnen deren Mittelpunkt mit B_0, B_1, B_2. Gemäß dem Satz von Napoleon-Barlotti ist das Dreieck $B_0B_1B_2$ gleichseitig. Sein Mittelpunkt ist der Schwerpunkt des Dreieckes $A_0A_1A_2$. In diesem Sonderfall ist $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}}$ (vgl: [Coxeter/Greitzer 1983], S. 67f, S. 167f).

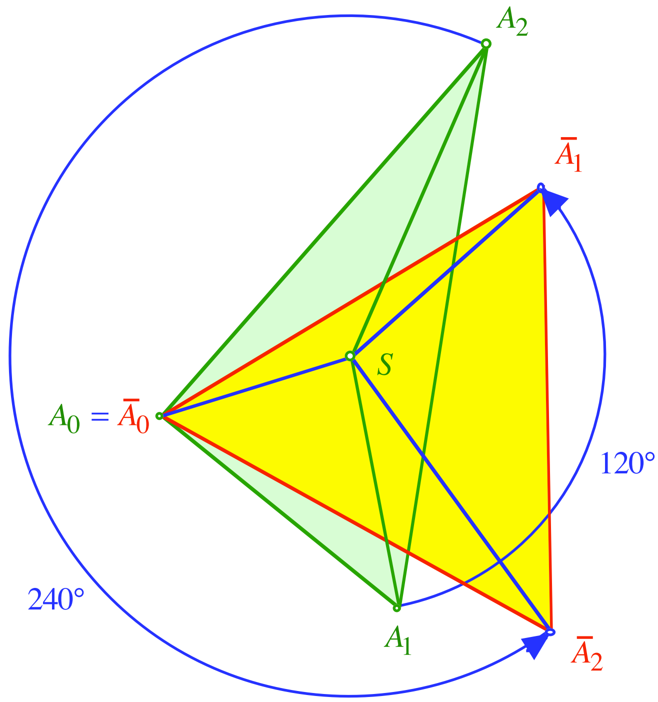


Sonderfall

2 Schwerpunkt als Drehzentrum

Wir beginnen mit dem beliebigen Dreieck $A_0A_1A_2$ mit dem Schwerpunkt S. Wir drehen den Punkt A_j um S um den Winkel $j \cdot 120° = j\frac{2\pi}{3}$ und erhalten so den Punkt $\overline{A}_j$.

Dann ist das Dreieck $\overline{A}_0\overline{A}_1\overline{A}_2$ gleichseitig.



Ein gleichseitiges Dreieck entsteht

Beweis

Wir arbeiten wieder in der Gaußschen Zahlenebene und setzen den Ursprung in den Schwerpunkt S. Dann ist zunächst $A_0 + A_1 + A_2 = 0$. Weiter ist

$$\overline{A}_0 = A_0 \qquad \overline{A}_1 = A_1 e^{\frac{2}{3}\pi i} \qquad \overline{A}_2 = A_2 e^{\frac{4}{3}\pi i}$$

Zu prüfen ist:

$$\overline{A}_1 - \overline{A}_0 \stackrel{?}{=} \left(\overline{A}_2 - \overline{A}_0\right) e^{\frac{1}{3}\pi i}$$

Einsetzen ergibt:

$$\overline{A}_1 - \overline{A}_0 \overset{?}{=} \left(\overline{A}_2 - \overline{A}_0\right) e^{\frac{1}{3}\pi i}$$

$$A_1 e^{\frac{2}{3}\pi i} - A_0 \overset{?}{=} \left(A_2 e^{\frac{4}{3}\pi i} - A_0 \right) e^{\frac{1}{3}\pi i}$$

$$A_0 \underbrace{\left(e^{\frac{1}{3}\pi i} - 1 \right)}_{e^{\frac{2}{3}\pi i}} + A_1 e^{\frac{2}{3}\pi i} - A_2 \underbrace{e^{\frac{5}{3}\pi i}}_{-e^{\frac{2}{3}\pi i}} \overset{?}{=} 0$$

$$e^{\frac{2}{3}\pi i} \underbrace{\left(A_0 + A_1 + A_2 \right)}_{=S=0} \overset{?}{=} 0$$

Der Sachverhalt lässt sich nicht auf n-Ecke verallgemeinern.

Literatur

[Coxeter/Greitzer 1983] Coxeter, H. S. M. / Greitzer, S. L.: Zeitlose Geometrie. Stuttgart: Klett 1983. ISBN 3-12-983390-0