Hans Walser, [20100730a]

Eine seltsame Gerade

1 Worum es geht

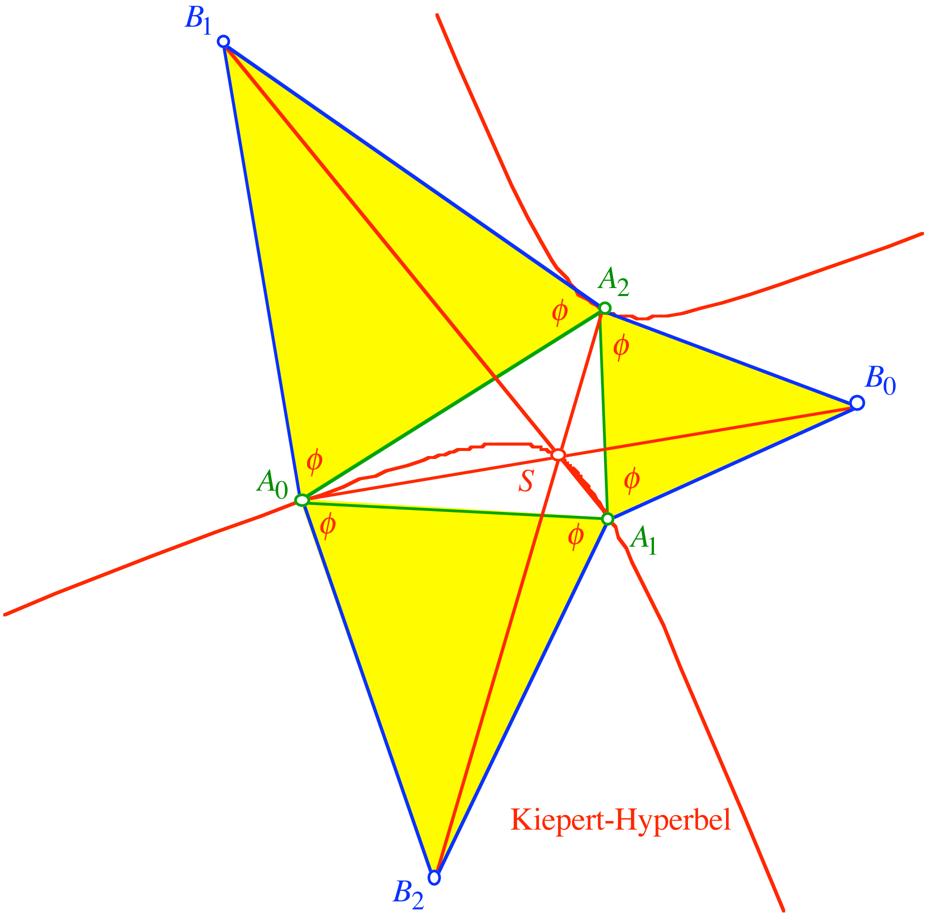
Im Umfeld der Kiepert-Hyperbel und der Euler-Gerade finden wir eine Gerade als Ort von Schnittpunkten.

2 Die Kiepert-Hyperbel

Einem Dreieck $A_0A_1A_2$ setzen wir ähnliche gleichschenklige Dreiecke $B_iA_{i-1}A_{i+1}$ mit Basiswinkel ϕ und Spitze B_i auf (Indizes modulo 3).

Die drei Geraden A_iB_i schneiden sich in einem Punkt S. Dies folgt aus einem Satz von Jacobi (vgl. [Walser 2004], S. 145).

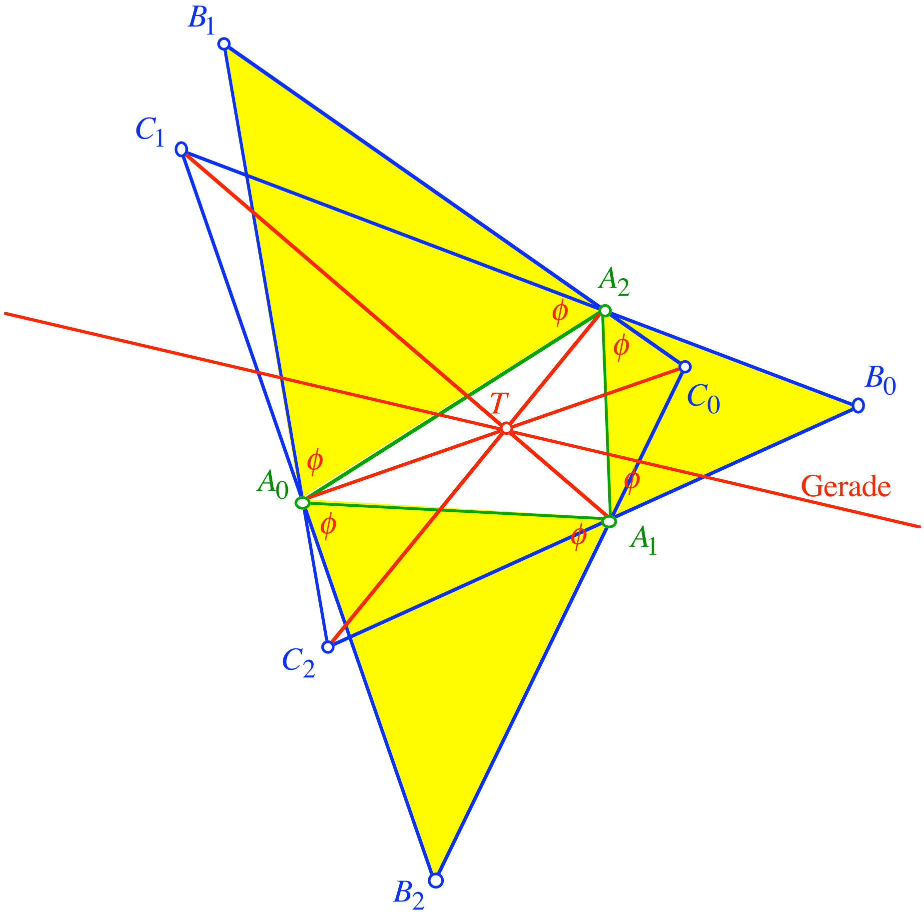
Wird der Basiswinkel ϕ variiert, beschreibt S eine gleichseitige Hyperbel, die so genannte Kiepert-Hyperbel (vgl. [Eddy/Fritsch 1994] und [Walser 2004], S. 150).



Kiepert-Hyperbel

3 Die seltsame Gerade

Nun sei C_i der Schnittpunkt der beiden Geraden $A_{i+1}B_{i+2}$ und $A_{i+2}B_{i+1}$. Anschaulich gesprochen heißt das, dass wir die Schenkel der Dreiecke „nach unten“ verlängern, bis sie sich wechselseitig schneiden.



Die Gerade

Die drei Geraden A_iC_i schneiden sich in einem Punkt T. Auch dies folgt aus dem Satz von Jacobi.

Wird nun der Winkel ϕ variiert, beschreibt T eine Gerade. Die Gerade verläuft (für $\phi = \frac{\pi}{2}$) durch den Umkreismittelpunkt des Dreieckes $A_0A_1A_2$, ist aber nicht die Euler-Gerade.

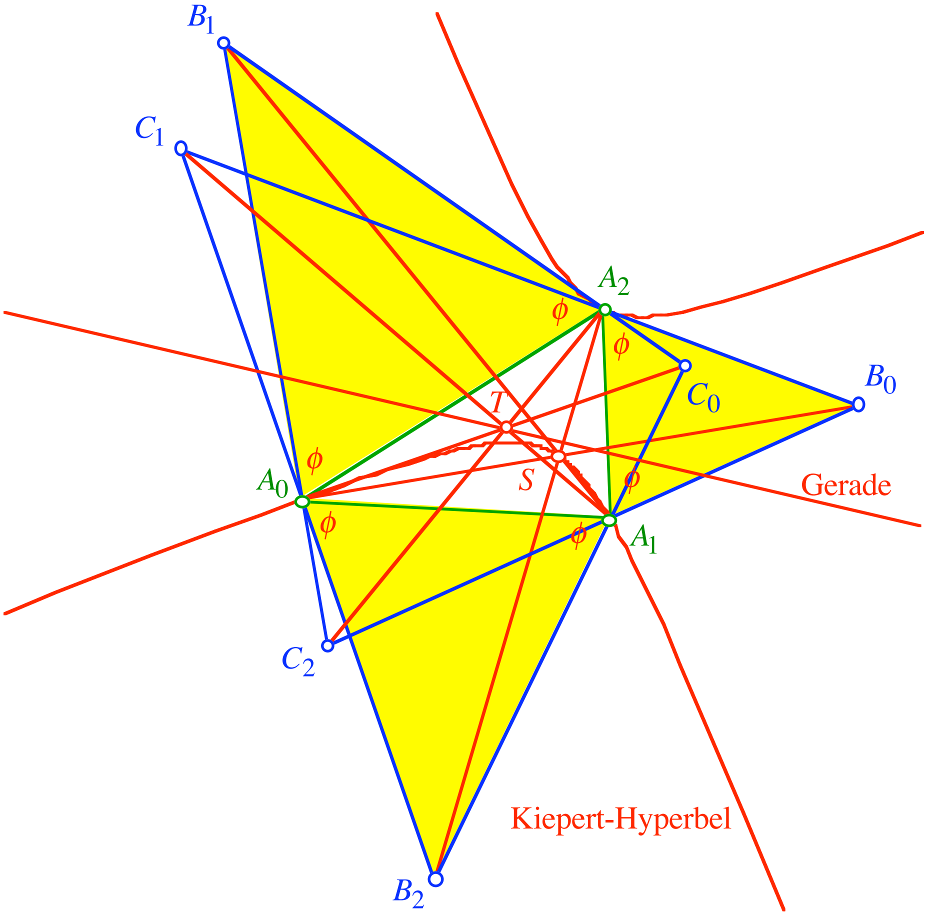
Verifikation mit DGS.

Fragen:

- Wie heißt diese Gerade?
- Beweis lege artis?

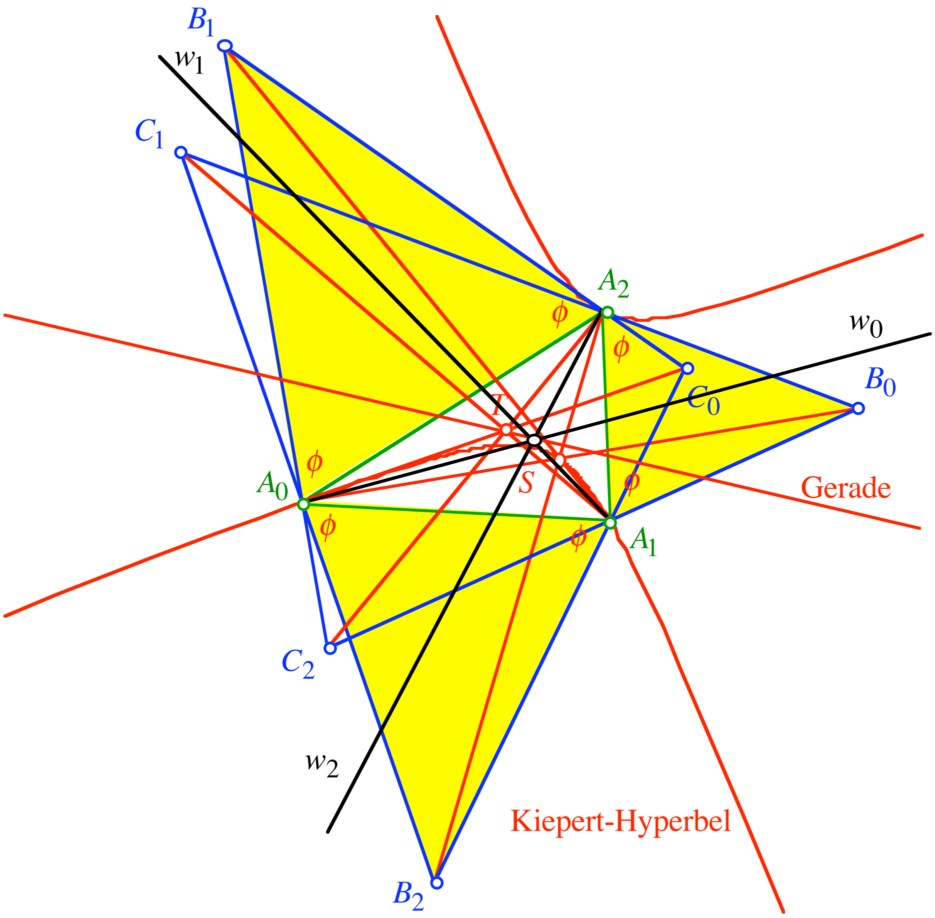
4 Überlagerung 1

Die folgende Abbildung zeigt die Überlagerung der beiden Figuren.



Kiepert-Hyperbel und Gerade

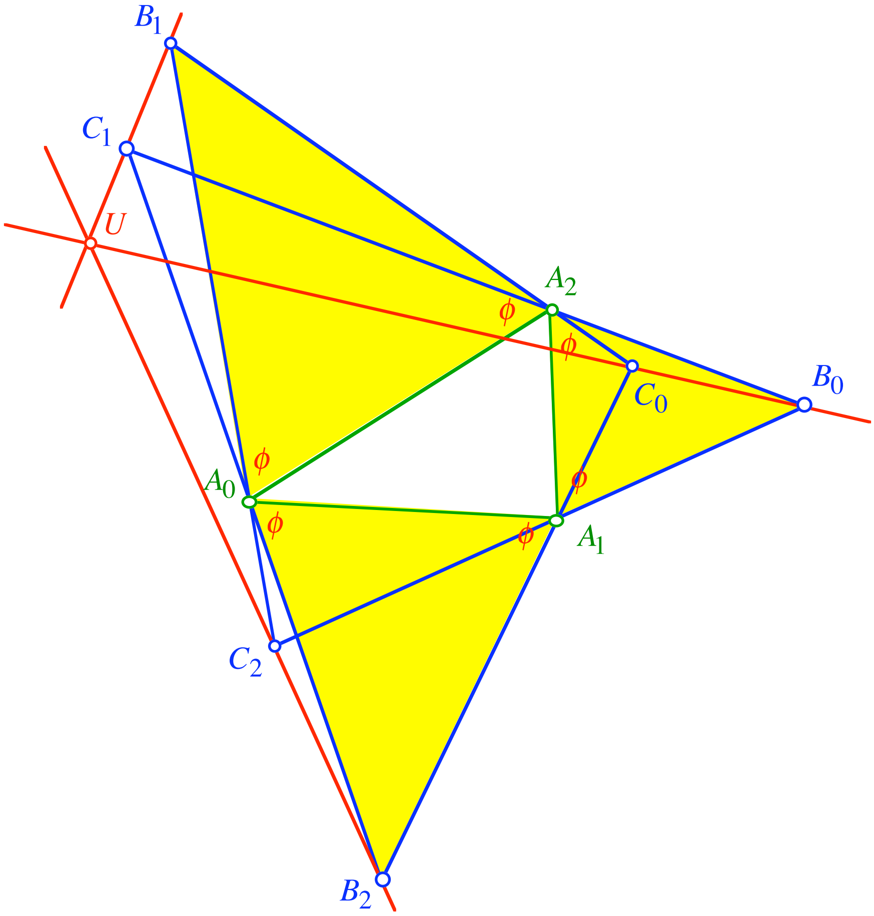
Wenn wir etwa die Gerade A_0B_0 an der Winkelhalbierenden w_0 des Dreieckswinkels an der Ecke A_0 spiegeln, kommt sie auf die Gerade A_0C_0 zu liegen. Verifikation DGS. Somit ist der Punkt T eine Art „Spiegelpunkt“ des Punktes U und unsere Gerade eine Art „Spiegelbild“ der Kiepert-Hyperbel.



Spiegelung an Winkelhalbierenden

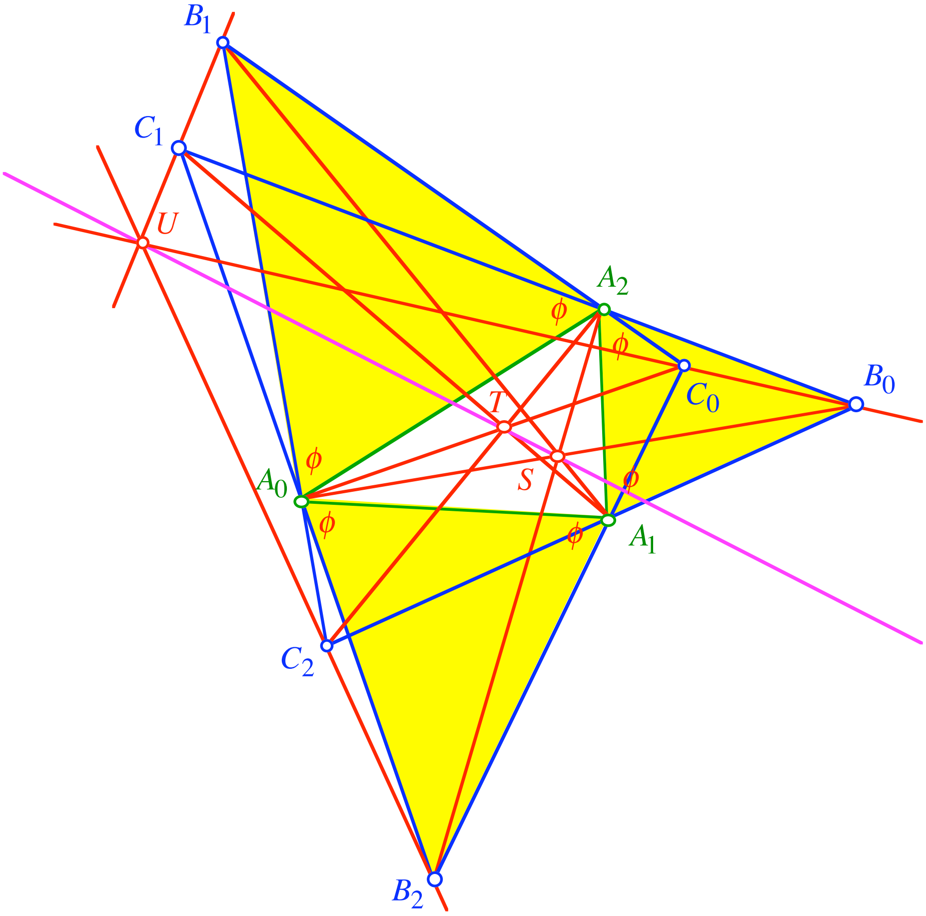
5 Ein weiterer Schnittpunkt

Die drei Geraden B_iC_i schneiden sich in einem Punkt U.



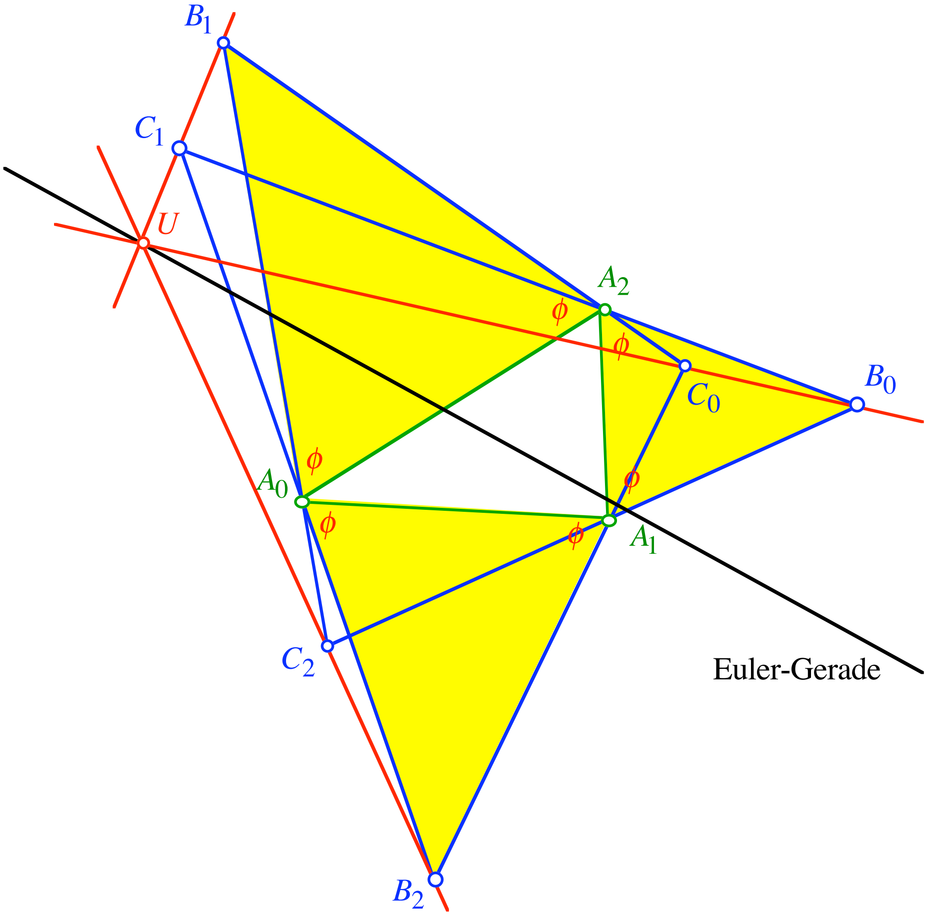
Ein weiterer Schnittpunkt

Die drei Schnittpunkte S, T und U sind kollinear. Verifikation DGS.



Kollineare Punkte

Bei Variation von ϕ beschreibt der Punkt U eine Gerade. Diese ist nun die Euler-Gerade. Verifikation DGS.

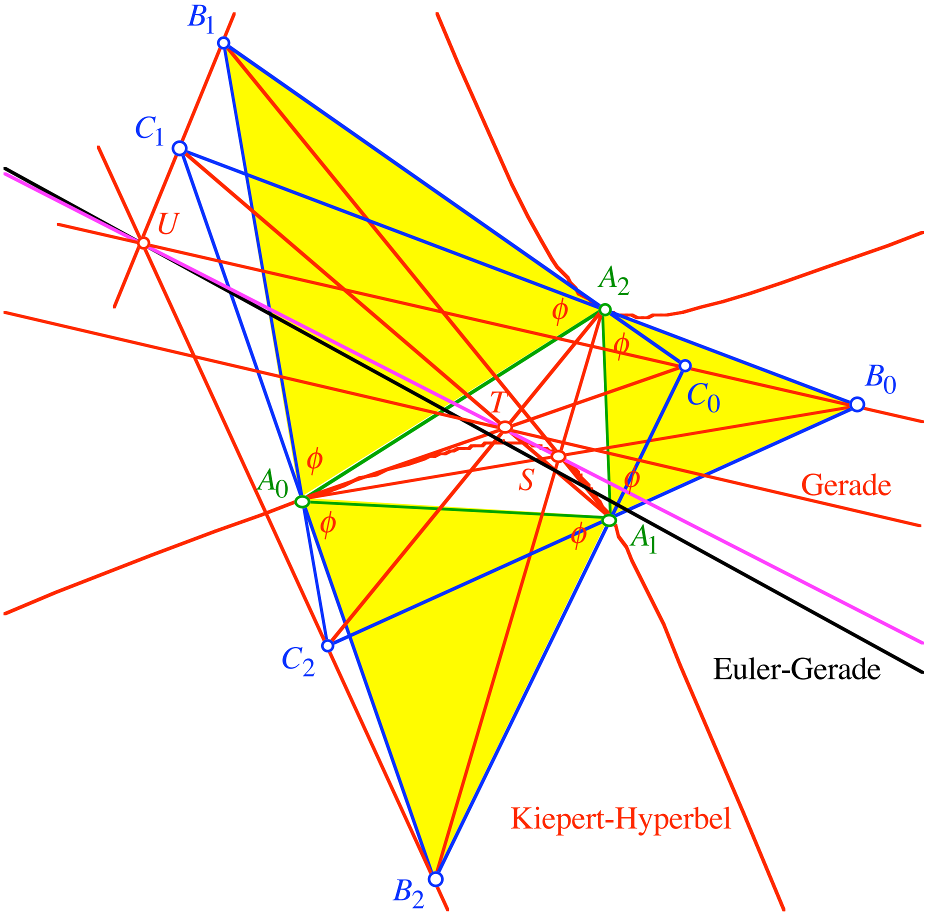


Euler-Gerade

Die Euler-Gerade kann also als Ort von Schnittpunkten erzeugt werden (vgl. [Walser 1993]).

6 Überlagerung 2

Die folgende Figur zeigt die Überlagerung sämtlicher besprochener Figuren.



Überlagerung 2

Literatur

[Eddy/Fritsch 1994] Eddy, R.H. / Fritsch, R.: The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle. Mathematics Magazine. Vol. 67, No. 3, June 1994, p. 188 - 205.

[Walser 1993] Walser, Hans: Die Eulersche Gerade als Ort "merkwürdiger Punkte". Didaktik der Mathematik (21), 1993, 95-98

[Walser 2004] Walser, Hans: 99 Schnittpunkte. Beispiele – Bilder – Beweise. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2004. ISBN 3-937219-10-2