Hans Walser, [20210626]

Seltsamer Pythagoras

Anregung: Thomas Jahre, Aufg. 57-861

1 Problemstellung

Das rote Quadrat hat die unbekannte Seitenläge a. Die kurzen Katheten der rechtwinkligen Dreiecke haben der Reihe nach die Längen 1, 2, 3 und 4.

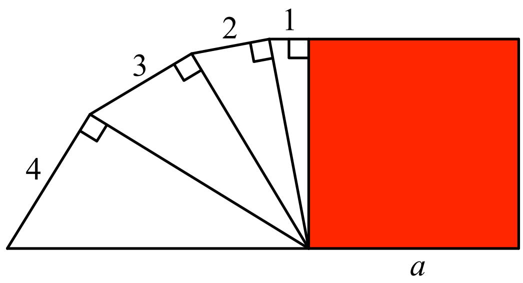

Abb. 1: Problemstellung

Wie groß muss die Seitenlänge a sein, damit die Hypotenuse des größten rechtwinkligen Dreiecks in Linie mit der Grundseite des Quadrates liegt?

2 Bearbeitung

Die Seitenlänge a ist die positive Lösung der Gleichung:

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a^2}}\right)+\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}\right)+\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{a^2+5}}\right)+\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{a^2+14}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Es ist $a \approx 5.318618244$.

3 Pythagoras

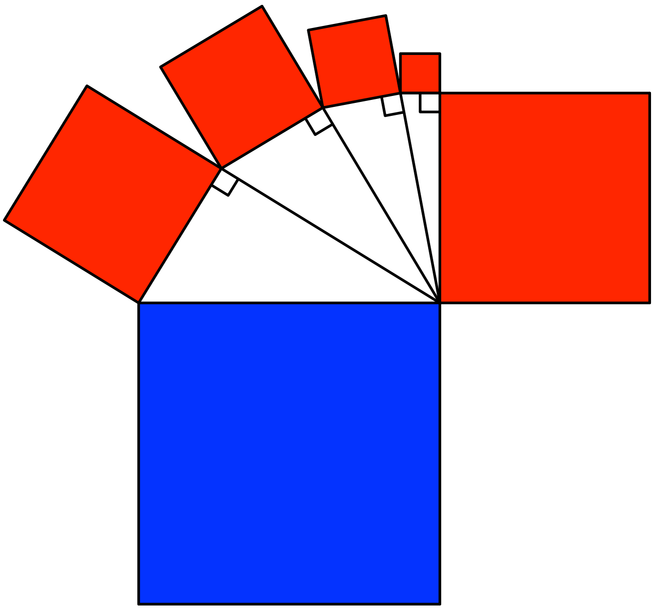

Abb. 2: Rot = blau

Die Flächensumme der fünf roten Quadrate (Abb. 2) ist gleich der blauen Quadratfläche.

Bemerkung: das Analoge gilt auch für andere aus rechtwinkligen Dreiecken gebauten eckigen Spiralen.

Websites

Thomas Jahre: Aufgabe der Woche

https://www.schulmodell.eu/aufgabe-der-woche.html